भूमिती

इ. ८वी

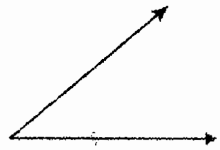
वर्ष १९८२

अधोरेखित शब्द व अक्षरसमूह अथवा अंक वरच्या इंकात घेणे. उदा. सर्व मजकूर SHREE7-0708 मध्ये असेल तर अधोरेखित मजकूर SHREE7-0709 मध्ये घेणे.

प्रकरण ३

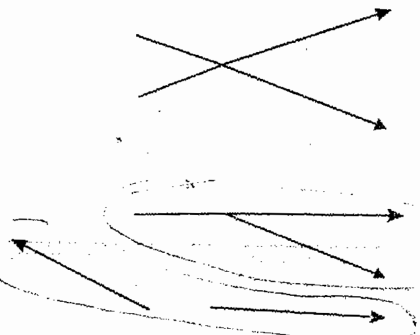
कोन व त्यांची एकरूपता

§ ~~३.१~~ कोन : ३.१



आ. ३.१

कोनाची आकृती तुमच्या परिचयाची आहे. बाजूला कोनाची ~~एक~~ आकृती दिली आहे. या आकृतीत दोन भिन्न किरण आहेत. कोन म्हणजे अशा दोन किरणांचा संयोग होय. पण कोणत्याही दोन किरणांच्या संयोगास कोन म्हणता येईल काय?



आ. ३.२

आ. ३.२ ~~मध्ये दाखवलेल्या~~ मधील किरणांच्या जोड्यांचा अभ्यास करा. या प्रत्येक जोडीतील किरणांच्या संयोगाला कोन म्हणता येईल का? का नाही? ~~सुरुवातीला दिलेली कोनाची आकृती~~ (आ. ३.१) आणि आ. ३.२ मधील दोन किरणांचे संयोगामध्ये ~~नेमका~~ कोणता फरक आहे?

आ. ३.१ मधील दोन्ही किरणांचा अंत्यबिंदू एकच आहे. आ. ३.२ मधील दोन किरणांचे अंत्यबिंदू वेगवेगळे आहेत.

यावरून कोनाच्या बाबतीत एक महत्त्वाची गोष्ट लक्षात येते ती अशी की, ज्या दोन किरणांनी कोन होतो त्या किरणांचा अंत्यबिंदू एकच असतो. आता आ. ३.३ पाहा.



आ. ३.३

या आकृतीत दोन किरण असून त्यांचा अंत्यबिंदू एकच आहे. पण हे दोन किरण एका रेषेत आहेत. ~~पुढे~~ पुढील इयत्तांत आपण अशा दोन किरणांच्या संयोगालाही कोन (सरळ कोन Straight angle) म्हणणार आहोत, पण ~~तूर्त~~ सध्या आपण अशा कोनाचा विचार करणार नाही.

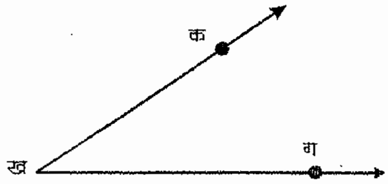
आ. ३.१ आणि आ. ३.३ मध्ये कोणता फरक आहे? आ. ३.१ मधील किरण एका रेषेत नाहीत. आ. ३.३ मधील किरण एका रेषेत ~~येत~~ आहेत. आ. ३.१ प्रमाणे एका रेषेत नसणाऱ्या किरणांच्या संयोगालाच आपण कोन म्हणणार आहोत.

यावरून कोनांच्या बाबतीत दुसरी गोष्ट लक्षात येते. ज्या दोन किरणांनी कोन होतो ते किरण एका रेषेत ~~नसले पाहिजेत.~~ नसावेत.

आता आपल्याला कोनाचे वर्णन योग्य शब्दांत करता येईल.

ज्या दोन किरणांचा अंत्यबिंदू एकच असतो व जे किरण एका रेषेत नसतात अशा दोन किरणांच्या संयोगाला कोन म्हणतात.

§ 3.2 कोनाचे वाचन : ३.२



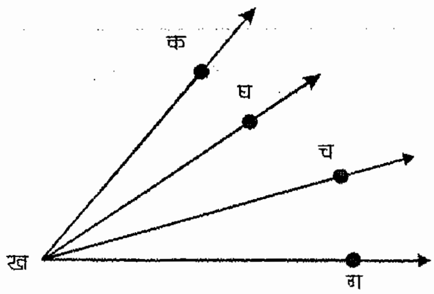
आ. ३.४

आ. ३.४ मधील कोन किरण खक व किरण खग यांचा संयोग आहे. या कोनाचे वाचन कोन कखग किंवा कोन गखक असे करतात.

चिन्हाच्या साहाय्याने हा कोन ∠कखग किंवा ∠गखक असा लिहितात.

त्या बिंदूचे अक्षर

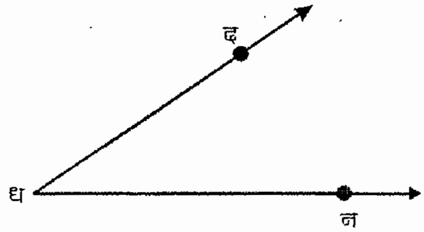
एखाद्या कोनाचे वाचन करताना तसेच कोन लिहिताना तो कोन ज्या बिंदूपाशी तयार होतो तो बिंदू दाखविणारे अक्षर इतर दोन अक्षरांच्या मध्ये आले पाहिजे हे लक्षात घ्या.



आ. ३.५

आ. ३.४ मधील ∠कखग ला थोडक्यात ∠ख असेही म्हणता येते. मात्र कोनाचा निर्देश एका अक्षराने करताना काही वेळा अडचण येते. आ. ३.५ पाहा. या आकृतीत ∠ख म्हणजे ∠कखग, ∠कखघ, ∠घखच की ∠चखग? म्हणून एका बिंदूपाशी एकापेक्षा जास्त कोन होत असतील तर ज्या कोनाचा आपल्याला निर्देश करावयाचा असतो, त्या कोनाचा संपूर्णपणे निर्देश करणे आवश्यक ठरते. यात

§ 3.3 कोनाच्या भुजा व कोनाचा शिरोबिंदू : ३.३



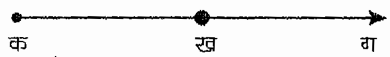
आ. ३.६

आ. ३.६ मधील कोन वाचा. तसेच हा कोन चिन्हाचा उपयोग करून लिहा. किरण धद व किरण धन यांना या कोनाच्या भुजा किंवा बाजू (sides or arms) म्हणतात. ध बिंदूला या कोनाचा शिरोबिंदू (vertex) म्हणतात.

आ. ३.५ मधील सर्व कोनांच्या भुजा व शिरोबिंदू सांगा.

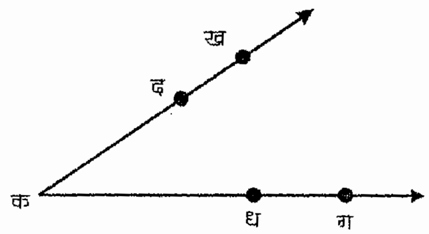
अर्थात कोन हा ज्या किरणांचा संयोग असतो त्या किरणांना कोनाच्या भुजा किंवा बाजू, व त्या किरणांच्या सामाईक अंत्यबिंदूला कोनाचा शिरोबिंदू म्हणतात.

प्रत्येक कोनाच्या दोन भुजा असतात. कोनाची प्रत्येक भुजा म्हणजे एक किरण होय. अर्थात प्रत्येक कोनात किरणांची एक जोडी असते.



आ. ३.७

किरण कख वर जर ग बिंदू असेल तर किरण कग हे किरण कख चेच दुसरे नाव होईल (आ.३.७ पाहा). किरण कख व किरण कग एकच आहेत.



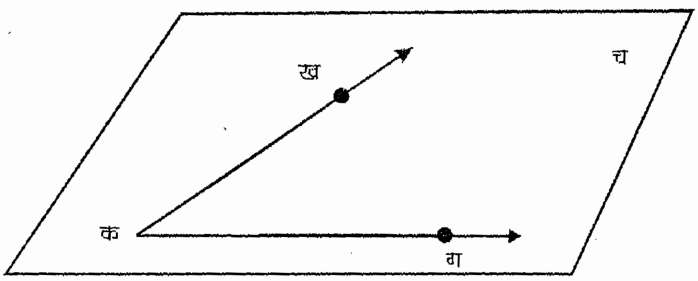
आ. ३.८

हाच प्रकार कोनाच्या बाबतीतही होतो. बाजूच्या आकृतीतील (आ.३.८) कोनाचे नाव ∠खकग, ∠दकध, ∠खकध, ∠दकग, ∠गकख, ∠धकद, ∠धकख, ∠गकद यांपैकी कोणतेही निवडता येते.

कोन हा त्याच्या भुजांचा संयोग असल्याने कोनाच्या भुजेवरील प्रत्येक बिंदू हा त्या कोनाचा घटक असतो. आ. ३.८ मध्ये बिंदू द व बिंदू ख हे कोनाची भुजा कख हिचे घटक असल्याने ते ∠खकग चे घटक आहेत. तसेच बिंदू ध व बिंदू क हे भुजा कग चे घटक असल्यामुळे ते ∠खकग चे घटक आहेत. शिरोबिंदू क हा दोन्ही भुजांचा घटक असल्याने ∠खकग चा घटक आहे हे उघड आहे.

प्रत्येक किरण हा अनंत बिंदूंचा संच असतो. कोन म्हणजे एका रेषेत नसलेल्या व सामाईक अंत्यबिंदू असलेल्या दोन किरणांचा संयोग असल्यामुळे प्रत्येक कोन हा त्याच्या भुजांवर असलेल्या अनंत बिंदूंचा संच आहे.

§ 3.4 कोनाची एकप्रतलीयता :

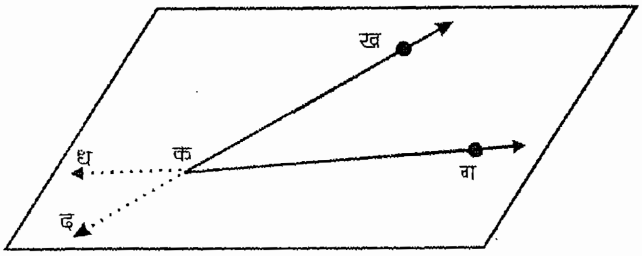


आ. ३.९

कोणताही कोन ही एकप्रतलीय आकृती असते. म्हणजे असे की, दिलेल्या कोनाला (अर्थात त्याच्या दोन्ही

भुजांवरील सर्व बिंदूंना) समाविष्ट करणारे एक व एकच प्रतल असते. आ. ३.९ मध्ये ∠खकग हा प्रतल च मध्ये असल्याचे दाखवले आहे.

एखादया कोनाला पूर्णपणे समाविष्ट करील असे प्रतलच नसेल असे होणार नाही. तसेच एखादया कोनाला समाविष्ट करणारी दोन भिन्न प्रतले असणार नाहीत.



आ. ३.१०

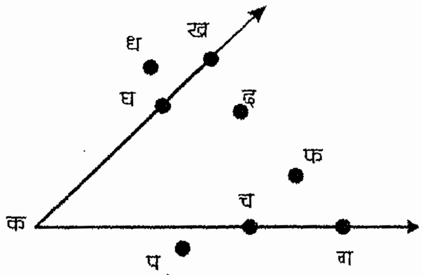
एका रेषेत नसणाऱ्या कोणत्याही तीन बिंदूंतून एक आणि एकच प्रतल जाते या मूलभूत तत्त्वाशी हे सुसंगत आहे. आ. ३.९ मध्ये ख, क व ग हे बिंदू कोनाचे घटक असून ते एका रेषेत नाहीत. या तीन बिंदूंतून जाणारे एक व फक्त एकच प्रतल असणार.

किरण कख हा रेषा दख मध्ये समाविष्ट आहे. आ. ३.१० पाहा. किरण कग हा रेषा धग मध्ये समाविष्ट आहे. रेषा दख व रेषा धग एकमेकींना छेदणाऱ्या रेषा आहेत.

एकमेकींना छेदणाऱ्या कोणत्याही दोन रेषांमुळे नेमके एकच प्रतल निश्चित होते असे एक मूलभूत तत्त्व आहे. या मूलभूत तत्त्वाचा विचार आपण पुढील इयत्तेत करणार आहोत.

या मूलभूत तत्त्वानुसार देखील कोणताही कोन ही एकप्रतलीय आकृती आहे हे उघड होते.

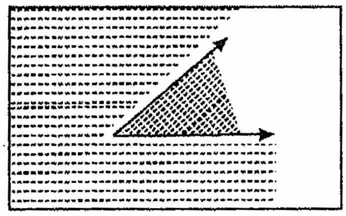
§ 3.5 कोनाचा अंतर्भाग व बहिर्भाग :



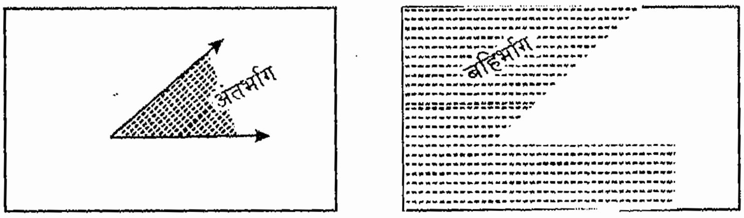
आ. ३.११

आकृती ३.११ पाहा. या आकृतीत ख,घ,क,च व ग हे बिंदू दिलेल्या कोनावर आहेत. द,प आणि ध,न हे बिंदू ∠खकग च्या संदर्भात कोठे आहेत असे तुम्ही म्हणाल? बिंदू द व बिंदू प हे कोनाच्या आतील भागात किंवा अंतर्भागात(interior) आणि बिंदू ध व बिंदू न हे कोणाच्या बाहेरील भागात किंवा बहिर्भागात(exterior) आहेत असे म्हणाल. हो ना? पण कोनाचा अंतर्भाग व बहिर्भाग म्हणजे नेमके काय?

आ. ३.१२ व ३.१३ मध्ये कोनाचा अंतर्भाग रेखांकित केला आहे, व कोनाचा बहिर्भाग या खुणांनी दाखवला आहे.

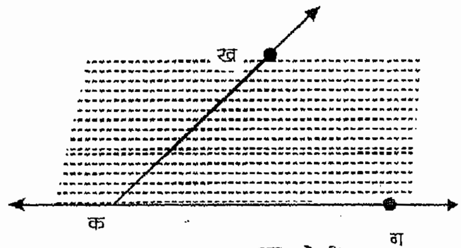


आ. ३.१२



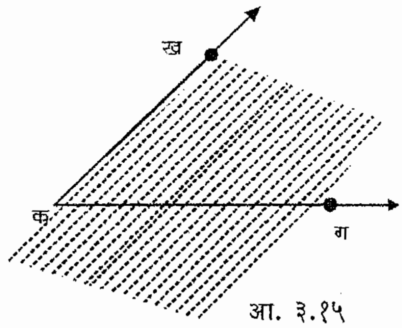
आ. ३.१३

प्रतलातील कोणत्याही रेषेमुळे प्रतलाचे विभाजन होते व दोन अर्धप्रतले निर्माण होतात, हे आपल्याला माहीत आहे. कोनाच्या अंतर्भागाचे स्पष्टीकरण, अर्धप्रतलाच्या साहाय्याने चांगले देता येते.



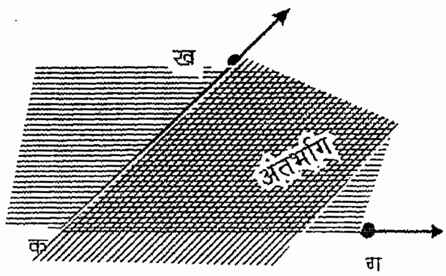
आ. ३.१४

∠खकग दिला असता रेषा कग च्या ख बाजूला असणाऱ्या अर्धप्रतलातील बिंदूंचा संच आ. ३.१४ मध्ये दाखवला आहे.



आ. ३.१५

आ. ३.१५ मध्ये रेषा कख च्या ग बाजूला असलेल्या अर्धप्रतलातील बिंदूंचा संच दाखवला आहे.



आ. ३.१६

आता आ. ३.१४ आणि आ. ३.१५ या एकत्र करून काढलेली आ. ३.१६ पाहा.
∠खकग च्या अंतर्भागात कोणते बिंदू आहेत?
यावरून कोनाच्या अंतर्भागाचे वर्णन कसे करता येईल?
∠खकग च्या अंतर्भागात कोणते बिंदू आहेत?
यावरून कोनाच्या अंतर्भागाचे वर्णन कसे करता येईल?

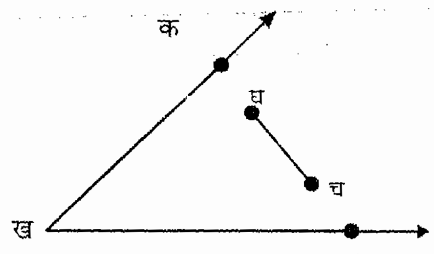
∠खकग दिला असता प्रतल कखग मध्ये बाजू कख च्या ग अंगाला आणि बाजू कग च्या ख अंगाला असलेले सामाईक बिंदू ∠खकग च्या अंतर्भागात असतात व अशा बिंदूंच्या संचाला ∠खकग चा अंतर्भाग म्हणतात. दिलेल्या कोनाच्या अंतर्भागात नसलेले व त्या कोनावर नसलेले बिंदू कोनाच्या बहिर्भागात असतात. या बिंदूंच्या संचाला कोनाचा बहिर्भाग म्हणतात.

कोन हा त्याच्या बाजूंवरील अनंत बिंदूंचा संच आहे. कोनाच्या अंतर्भागात तसेच बहिर्भागात अनंत बिंदू असतात ~~हे उघड आहे~~.

दिलेल्या कोनाचे ~~किंवा कोनावरील~~ बिंदू हे त्या कोनाच्या अंतर्भागातही नसतात व बहिर्भागातही नसतात, ~~हे लक्षात घेणे महत्त्वाचे आहे~~.

एखादया प्रतलात कोणताही एक कोन ~~घेतला असता~~ बिंदूंचे तीन विभिन्न संच ~~आपल्याला~~ मिळतात : (१) कोन,(२) कोनाचा अंतर्भाग, आणि (३) कोनांचा बहिर्भाग

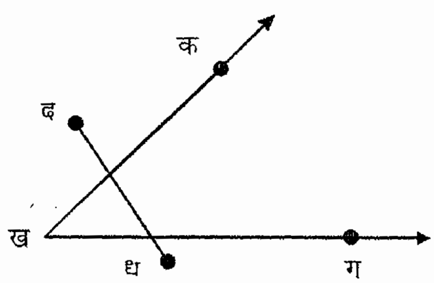
प्रतलातील (mutually exclusive) घेतल्यास



आ. ३.१७

आकृती ३.१७ मध्ये ∠कखग च्या अंतर्भागात घ व च हे कोणते दोन बिंदू घेऊन त्यांना सांधले आहे. संपूर्ण रेख घच कोनाच्या अंतर्भागात आहे. यावरून कोनाच्या अंतर्भागाचा कोणता गुणधर्म लक्षात येतो?

कोणत्याही कोनाचा अंतर्भाग हा बहिर्वक्र संच असतो.



आ. ३.१८

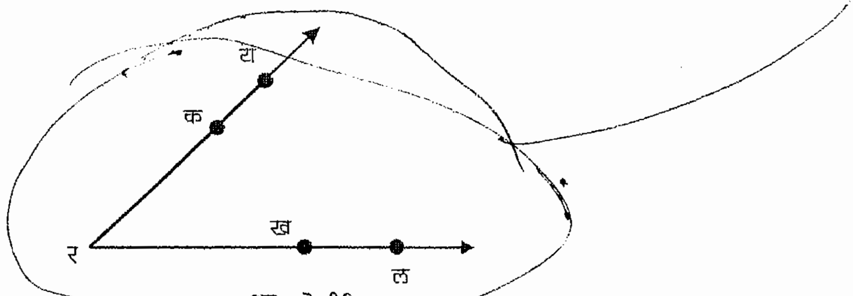
आ. ३.१८ मध्ये ∠खकग च्या बहिर्भागात बिंदू द व बिंदू ध घेतले आहेत व त्यांना सांधले आहे. संपूर्ण रेख दध

हा ~~∠खकम च्या~~ ∠कखग च्या बहिर्भागात नाही.

∴ कोणत्याही कोनाचा बहिर्भाग हा बहिर्वक्र संच नसतो.

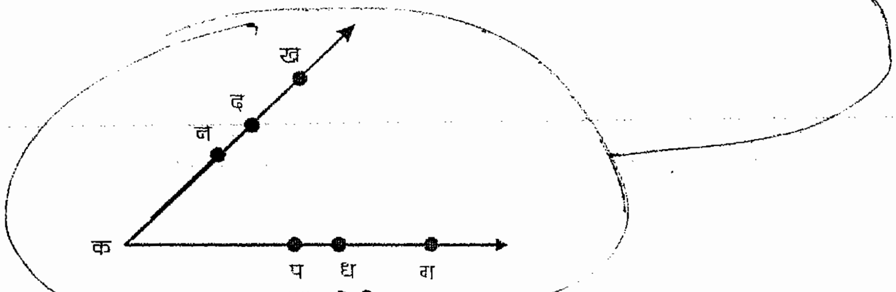
§ ~~3.6~~ **प्रश्न :** ३.६

१. आ. ३.१९ मधील कोन किती निरनिराळ्या पद्धतींनी लिहिता किंवा वाचता येतो? हा कोन निरनिराळ्या पद्धतींनी वाचा.



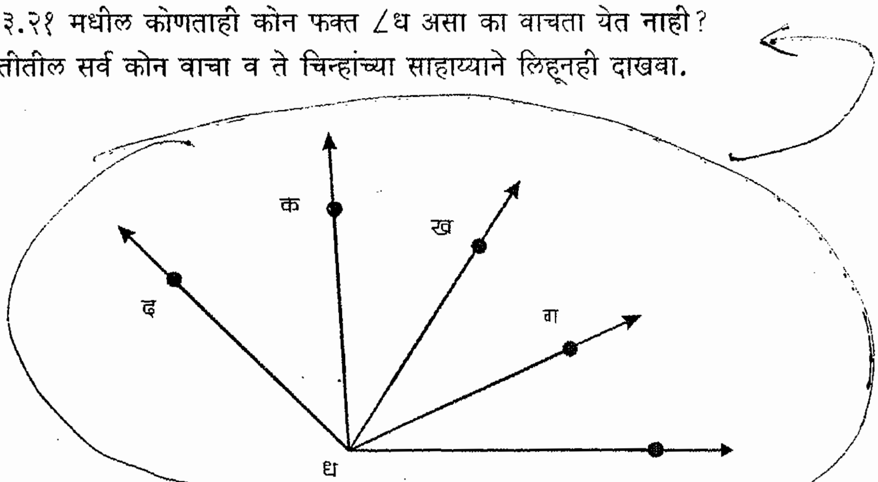
आ. ३.१९

२. आ. ३.२० मधील कोन चिन्हाच्या साहाय्याने निरनिराळ्या पद्धतींनी लिहून दाखवा.



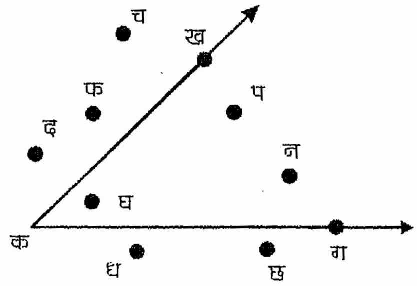
आ. ३.२०

३. आ. ३.२१ मधील कोणताही कोन फक्त ∠ध असा का वाचता येत नाही? या आकृतीतील सर्व कोन वाचा व ते चिन्हांच्या साहाय्याने लिहूनही दाखवा.



आ. ३.२१

४. आ. ३.२२ मधील (क) कोणते बिंदू कोनाच्या अंतर्भागात आहेत?



आ. ३.२२

(ख) कोणते बिंदू कोनाच्या बहिर्भागात आहेत?

(क) बिंदू ख हा कोनाच्या अंतर्भागात तसेच बहिर्भागात का नाही?

(५) मोकळ्या जागा भरा :

(क) कोन हा ______ अंत्यबिंदू असलेल्या व ______ दोन किरणांचा संयोग होय.

(ख) कोनावरील कोणताही बिंदू हा त्या कोनांच्या ______ तसेच ______ नसतो.

(ग) ∠घचछ दिला असेल तर रेषा घच च्या छ बाजूला आणि रेषा चछ च्या घ बाजूला असलेल्या बिंदूंच्या __________ ∠घचछ चा अंतर्भाग म्हणतात.

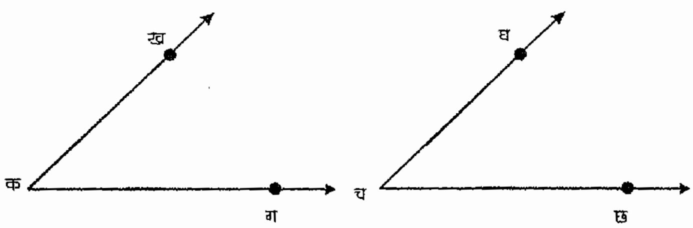
(६) ∠घचछ चा शिरोबिंदू कोणता असेल?

(७) कोनाची एक आकृती काढा व तिला नाव दया. तुम्ही काढलेल्या कोनाच्या बाजू कोणत्या?

(८) कोणताही कोन ही एकप्रतलीय आकृती आहे हे कसे दाखवता येईल?

§ **~~3.7~~ कोनांची एकरूपता :** ३.८

सरळ तारांचे चार तुकडे घ्या. दोन दोन तारांची एकीकडील टोके एकत्र बांधून आ. ३.२३ मध्ये दिलेल्या कोनांचे आकार तयार करा.



आ. ३.२३

आता एका कोनाचा शिरोबिंदू दुसऱ्या कोनाच्या शिरोबिंदूवर, एका कोनाची एक बाजू दुसऱ्या कोनाच्या एका बाजूवर आणि एका कोनाची दुसरी बाजू दुसऱ्या कोनाच्या दुसऱ्या बाजूवर येईल असे ते एकमेकांवर ठेवा आणि कोन एकमेकांशी जुळतात का हे पाहा. दोन्ही कोन एकमेकांशी तंतोतंत जुळतील.

आता आ. ३.२३ मधील ∠खकग वर पातळ, अर्धपारदर्शक कागद ठेवून तो कोन कागदावर काढून घ्या. याच पद्धतीने दुसऱ्या पातळ, अर्धपारदर्शक कागदावर ∠घचछ काढा. आता या दोन्ही कागदांवरील कोनांच्या आकृती एकमेकींवर ठेवून त्या तंतोतंत जुळतात का हे पाहा. दोन्ही कोन तंतोतंत जुळल्याचे दिसेल.

दोन कोन एकमेकांशी तंतोतंत जुळत असतील
तर अशा कोनांना एकरूप कोन म्हणतात.

∠खकग व ∠घचछ हे दोन कोन एकरूप आहेत. हे ∠खकग ≅ ∠घचछ अशा चिन्हाने दाखवतात.

§ 3.8 कोनांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म :

कोनांच्या एकरूपतेचे खालील गुणधर्म लक्षात असावेत.

(१) प्रत्येक कोन हा स्वत:शी एकरूप असतो. ∠खकग ≅ ∠खकग

(२) एक कोन दुसऱ्या कोनाशी एकरूप असेल तर दुसरा कोन पहिल्या कोनाशी एकरूप असतो.

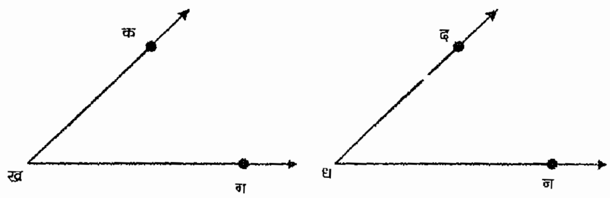
जर ∠खकग ≅∠घचछ तर ∠घचछ ≅ ∠खकग.

(३) एक कोन दुसऱ्या कोनाशी एकरूप असेल आणि दुसरा कोन तिसऱ्या कोनाशी एकरूप असेल तर पहिला कोन तिसऱ्या कोनाशी एकरूप असतो.

जर ∠खकग ≅ ∠घचछ व ∠घचछ ≅ ∠यरल, तर ∠खकग ≅∠यरल.

§ 3.9 दिलेल्या कोनापेक्षा मोठा व लहान कोन :

ट्रेस करून दोन वेगवेगळ्या अर्धपारदर्शक कागदांवर आ. ३.२४ मध्ये दिलेले ∠कखग व ∠दधन काढून घ्या,



आ. ३.२४

∠दधन हा ∠कखग वर अशा रीतीने ठेवा की, बिंदू ध बिंदू ख वर आणि भुजा धन ही भुजा खग वर पडेल. आता भुजा दध, तिच्या अंत्यबिंदूखेरीज ∠कखग च्या अंतर्भागात आहे हे दिसेल. या स्थितीत ∠दधन हा ∠कखग पेक्षा लहान (less than) आहे असे म्हणतात व हे चिन्हांच्या साहाय्याने ∠दधन < ∠कखग असे लिहितात. आता ∠कखग हा∠दधन वर अशा रीतीने ठेवा की बिंदू ख हा ध बिंदूवर आणि भुजा खग ही धन वर पडेल. भुजा खक ही तिच्या अंत्यबिंदूखेरीज ∠दधन च्या बहिर्भागात आहे हे दिसेल. या स्थितीत ∠कखग हा ∠दधन पेक्षा मोठा (greater than) आहे असे म्हणतात व हे चिन्हाच्या साहाय्याने ∠कखग > ∠दधन असे लिहितात.

आता तुमच्या लक्षात आले असेल की, ∠कखग व ∠दधन हे दोन कोन दिले असतील तर

(१). ∠कखग व ∠दधन हे एकरूप असतील, म्हणजेच ∠कखग ≅ ∠दधन

किंवा

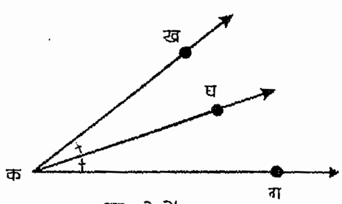
(२). ∠कखग हा ∠दधन पेक्षा मोठा असेल, म्हणजेच ∠कखग > ∠दधन

किंवा

(३). ∠कखग हा ∠दधन पेक्षा लहान असेल, म्हणजेच ∠कखग हा ∠दधन

§ 3.10 कोनाचा दुभाजक :

एका अर्धपारदर्शक कागदावर कोणताही एक कोन ∠खकग काढा. या कागदाची अशी घडी घाला की, भुजा कग ही भुजा कख वर पडेल. आता कागदाची घडी उलगडा. घडीच्या रेषेवर आणि ∠खकग च्या अंतर्भागात एक बिंदू घ घ्या. किरण कघ काढा. किरण कघ हा ∠खकग चा दुभाजक (bisector) होईल.



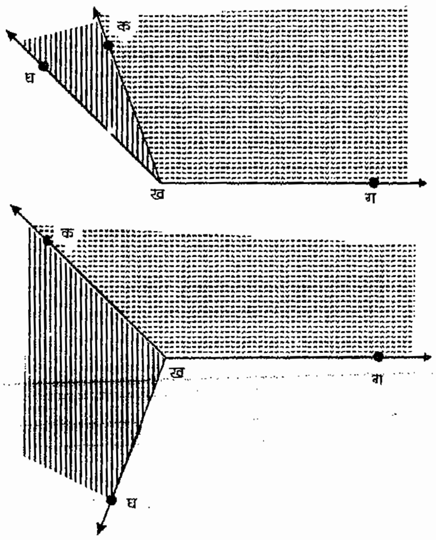
आ. ३.२५

आत ∠खकघ व ∠घकग विचारात घ्या. या दोन कोनांमध्ये परस्पर काय संबंध आहे? ∠खकघ व ∠घकग हे परस्परांशी तंतोतंत जुळतात. (हे आपल्या घडी घालण्यावरून दिसले आहे). म्हणून ∠खकघ ≅ ∠घकग. यावरून कोनाच्या दुभाजकाचे वर्णन करता येईल.

∠खकग हा दिलेला कोन असेल व या कोनाच्या अंतर्भागात घ हा असा बिंदू असेल की ∠खकघ ≅ ∠घकग तर कघ या किरणाला ∠खकग चा दुभाजक म्हणतात.

दिलेल्या कोनाचा दुभाजक हा त्या कोनाची दुभागणी करतो असे आपण सोयीसाठी म्हणू. दिलेल्या कोनाची दुभागणी कशी करावी किंवा दिलेल्या कोनाचा दुभाजक कसा काढावा ही रचना आपण नंतर शिकणार आहोत.

§ ~~3.11~~ **संलग्न कोन :** 3.11



आ. ३.२६

आ. ३.२६ मधील ∠कखग व ∠घखक पाहा. यात पुढील गुणधर्म आहेत असे दिसेल.

(१) या दोन्ही कोनांचा शिरोबिंदू एकच आहे.

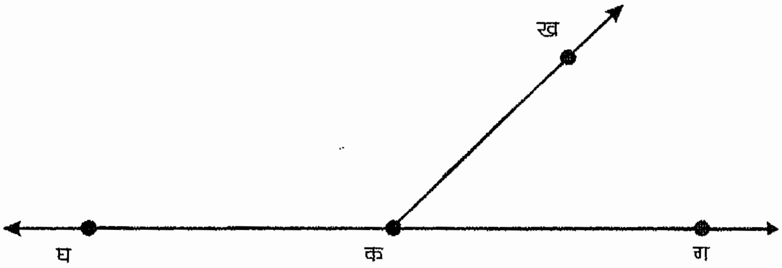
(२) या दोन कोनांस एक सामाईक भुजा आहे.

(३) या दोन कोनांचे अंतर्भाग परस्परांपासून विभिन्न (mutually exclusive) आहेत. म्हणजेच या दोन कोनांच्या अंतर्भागात एकही सामाईक बिंदू नाही. अशा कोनांना **संलग्न कोन** (Adjacent Angles) म्हणतात.

संलग्न कोन हा शब्दप्रयोग कोनांच्या जोडीबाबतच वापरता येतो. एकट्या कोनाबाबत वापरता येणारच नाही. ~~हे येथे लक्षात ठेवावे.~~

आ. ३.२६ मधील ∠कखग व ∠घखक खेरीज आणखी कोणत्या कोनांना संलग्न कोन म्हणता येईल?

§ ~~3.12~~ **कोनांची रेषीय जोडी किंवा रेषीय जोडीतील कोन :** 3.12



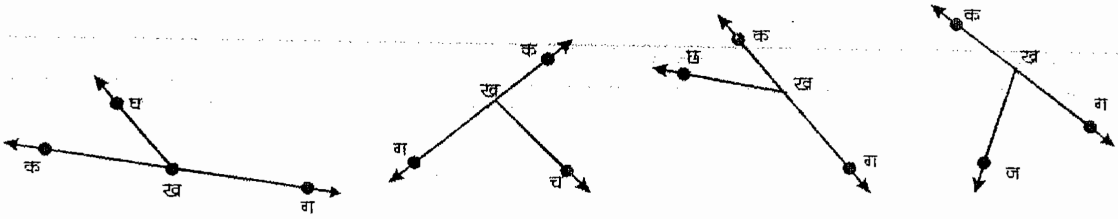
आ. ३.२७

आ. ३.२७ मधील ∠खकग व ∠खकघ यांना संलग्न कोन म्हणता येईल की नाही? ∠खकग व ∠खकघ हे विशिष्ट प्रकारचे संलग्न कोन आहेत. या संलग्न कोनांचे वैशिष्ट्य कोणते?

या कोनांची सामाईक भुजा कख वगळता उरलेल्या भुजा, म्हणजेच ∠खकग ची भुजा कग आणि ∠खकघ ची भुजा कघ हे विरुद्ध किरण आहेत. अशा प्रकारच्या कोनांच्या जोडीला कोनांची रेषीय जोडी किंवा रेषीय जोडीतील कोन (angles in a linear pair or linear pair) असे म्हणतात.

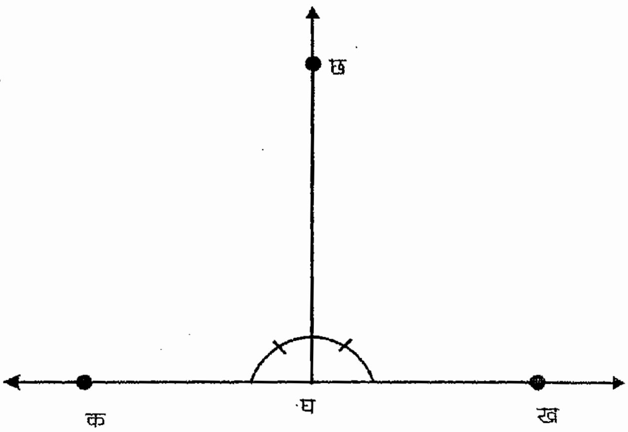
दोन संलग्न कोनांच्या सामाईक नसलेल्या भुजा जर विरुद्ध किरण असतील तर त्या संलग्न कोनांस रेषीय जोडी असे म्हणतात.

रेषीय जोडीतील कोनांच्या काही आकृती खाली दिल्या आहेत.



आ. ३.२८

§ 3.13 काटकोन :



आ. ३.२९

एका अर्धपारदर्शक कागदावर एक रेषा कख घ्या. या रेषेवर घ हा एक बिंदू घ्या. आता घ बिंदूमध्ये कागदाची अशी घडी घाला की, किरण घख हा किरण घक वर पडेल. घडी उलगडून घडीच्या रेषेवर रेषा कख च्या एका अंगास एक बिंदू छ घ्या. घछ हा किरण काढा.

∠छघख व ∠छघक हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत. हे आता तुम्ही ओळखू शकता. रेषीय जोडीतील या कोनांचे आणखी कोणते वैशिष्ट्य तुमच्या लक्षात येते?

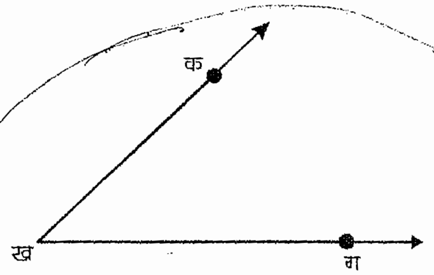
येथे ∠छघख ≅ ∠छघक.

या स्थितीत ∠छघख ≅ ∠छघक पैकी प्रत्येक कोनास काटकोन (Right Angle) म्हणतात.

रेषीय जोडीतील दोन कोन एकरूप असतील तर त्या कोनांपैकी प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

लघुकोन व विशाल कोन :

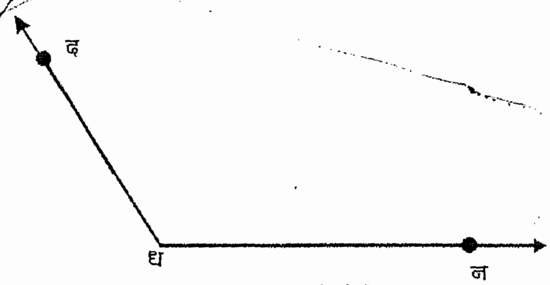
काटकोनापेक्षा लहान असलेल्या कोनाला लघुकोन (Acute Angle) म्हणतात.



आ. ३.३०

आ. ३.३० ही ∠कखग या लघुकोनाची आहे.

काटकोनापेक्षा मोठा असलेल्या कोनाला **विशालकोन** (obtuse Angle) म्हणतात.



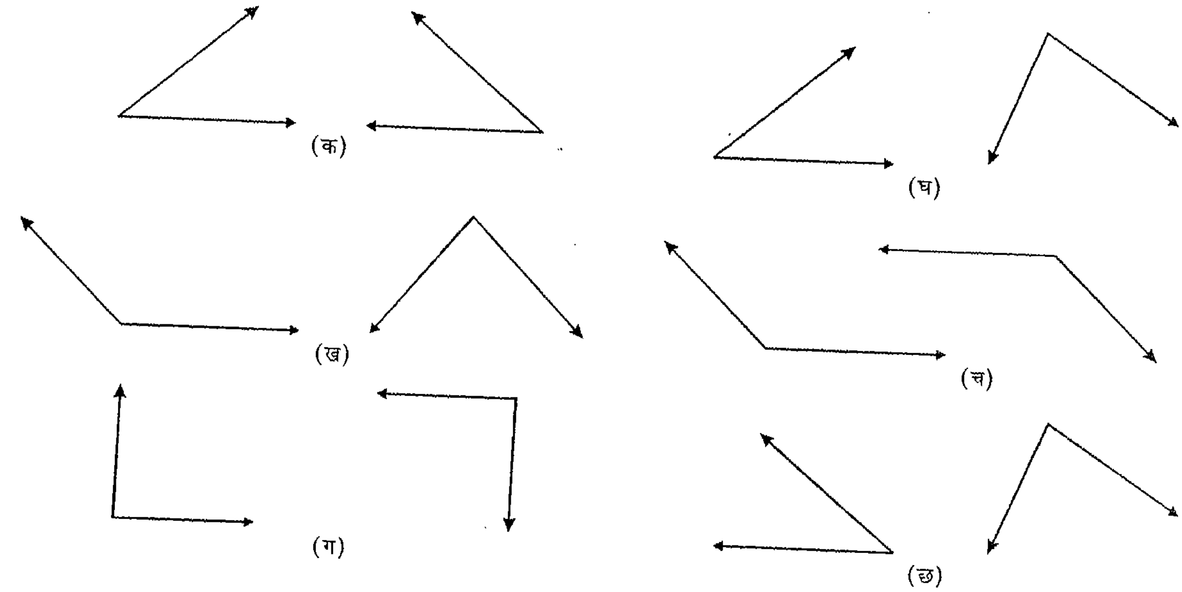
आ. ३.३१

आ. ३.३१ मध्ये ∠दधन हा विशालकोन दाखवला आहे.

§ **3.14 प्रश्न :** ३.१४

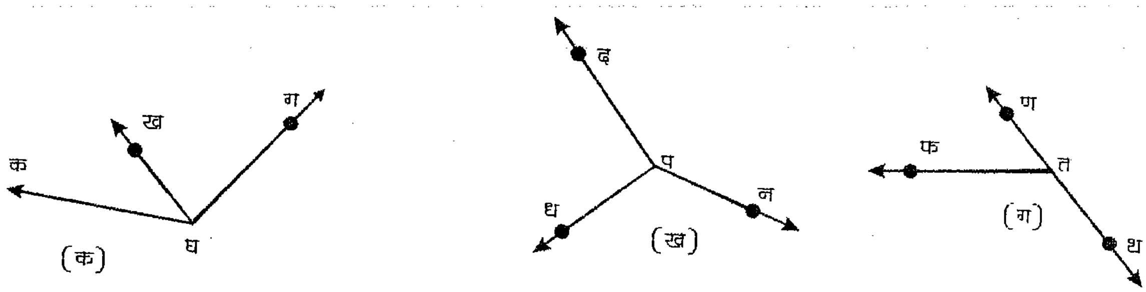
१. दिलेले दोन कोन एकरूप आहेत असे तुम्ही केव्हा म्हणाल?

२. खालीलपैकी कोणत्या जोडीतील कोन एकरूप आहेत असे तुम्हांला वाटते? कोणत्या जोडीतील कोन एकरूप नाहीत असे दिसते? तुम्ही केलेला अंदाज बरोबर असल्याचा पडताळा कसा घ्याल?



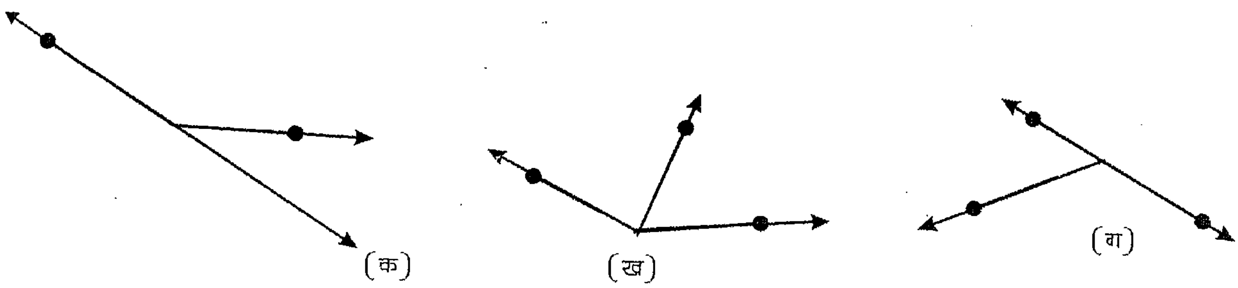
आ. ३.३२

३. खालील आकृतींपैकी प्रत्येक आकृतीतील संलग्न कोन सांगा.



आ. ३.३३

४. खालील आकृतींपैकी कोणत्या आकृतीतील कोन रेषीय जोडीतील कोन आहेत? कोणत्या आकृतीतील कोन रेषीय जोडीतील कोन आहेत? कोणत्या आकृतीतील कोन रेषीय जोडीतील कोन नाहीत? कारण सांगा.



आ. ३.३४

५. खालील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

(H$ {H$U H$Krhm ∠खकग चा दुभाजक आहे. ∴ ∠खकघ ≅ ____________

(ख) रेषीय जोडीतील कोन ____________ असतील तर त्या जोडीतील प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

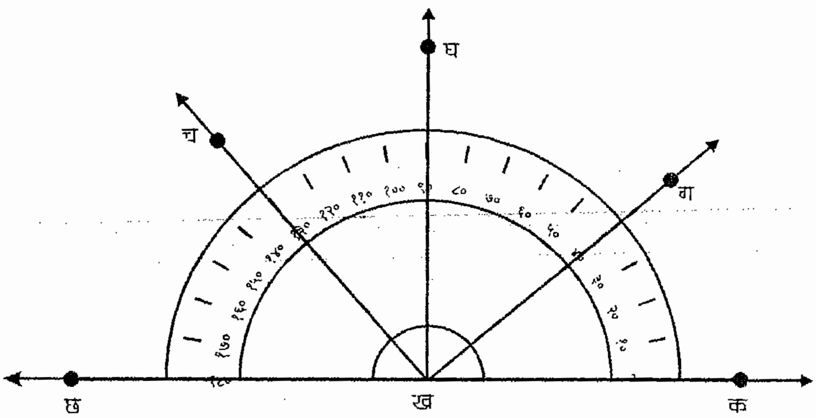
(ग) रेषीय जोडीतील कोनांची सामाईक भुजा सोडून उरलेल्या भुजा या ____________ असतात.

(घ) लघुकोन हा काटकोनापेक्षा ________ तर विशालकोन हा काटकोनापेक्षा ____________ असतो.

§ ~~3.15~~ कोनाचे माप :

दोन कोनांची तुलना करण्यासाठी आपल्याला कोन मोजावे लागतात. कोन मोजण्यासाठी कोनमापकाचा उपयोग केला जातो. तुमच्या कंपासपेटीतील कोनमापकावर केलेल्या खुणांचा सूक्ष्म अभ्यास करा. कोनमापकावर तुम्हांला ० ते १८० च्या खुणा दिसतील. कोनाचे माप ० व १८० यांच्या दरम्यान असते असे गृहीत धरतो व त्यानुसार कोनमापकावर संख्यादर्शक खुणा करतो. कोनमापकावरील प्रत्येक एकक परिमाणास अंश (degree) म्हणतात. कोनमापकाने कोणत्याही कोनाचे अंश आपण मोजू शकतो.

कोनमापक वापरून एखादा कोन कसा मोजावा हे खालील आकृतीवरून तुमच्या लक्षात येईल.



आ. ३.३५

आ. ३.३५ मध्ये ∠गखक चे अंश ४०, ∠घखक चे अंश ९० व ∠चखक चे अंश १३० आहेत. हे खालील पद्धतीने सांगितले जाते.

m ∠गखक = ४०, m ∠घखक = ९०, m ∠चखक = १३०

आपल्या भूमितीच्या अभ्यासात आपण कोन अंशांतच मोजणार असल्यामुळे m ∠गखक = ४० इतकेच सांगणे वा लिहिणे पुरेसे असते. ४० या संख्येसमोर अंश हा शब्द किंवा ४०° असे चिन्ह वापरण्याची गरज नाही.

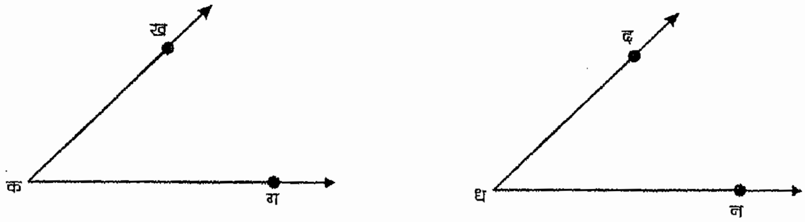
एखादया कोनाचे माप आपण सांगतो म्हणजे त्या कोनाशी एक धन वास्तवसंख्या निगडीत करतो.

कोनाच्या मापासंबंधीचा आपला हा अनुभव आपण खालीलप्रमाणे नमूद करू.

'प्रत्येक कोनाशी निगडीत ० ते १८० च्या दरम्यानची एक व एकच धन वास्तवसंख्या असते व या संख्येला आपण त्या कोनाचे माप म्हणतो'.

§ ~~3.16~~ कोनाचे माप व एकरूपता :

ट्रेसिंग पेपरचा उपयोग करून खालील आकृतीतील ∠खकग व ∠दधन एकरूप आहेत याची खात्री करून घ्या.



आ. ३.३६

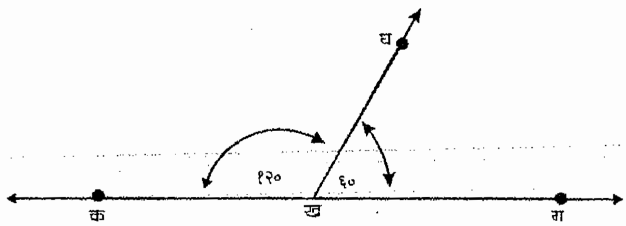
आता ∠खकग व ∠दधन यांची मापे घ्या. या दोन कोनांच्या मापात काय संबंध आढळतो?

आता दोन पातळ कागदांवर ∠खकग व ∠दधन असे काढा की m ∠खकग = ५० व m ∠दधन = ५०. ∠दधन ही आकृती ∠खकग वर ठेवून हे दोन कोन एकरूप आहेत का हे पाहा.

यावरून आपण खालील निष्कर्ष काढू शकतो.

दोन कोन एकरूप असतील तर त्यांची मापे सारखी असतात. तसेच दोन कोनांची मापे सारखी असतील तर ते दोन कोन एकरूप असतात.

§ 3.17 रेषीय जोडीतील कोन, काटकोन, लघुकोन व विशालकोन यांची मापे :



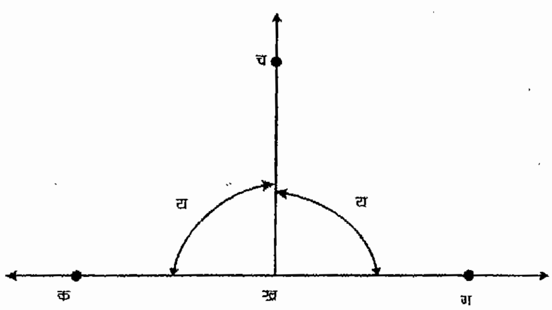
आ. ३.३७

(१) आ. ३.३७ मध्ये ∠घखग व ∠घखक ही कोनांची रेषीय जोडी दिली असून m ∠घखग = ६०. प्रत्यक्ष मोजमापावरून m ∠घखक = १२० हे तुम्हांला पाहता येईल.

रेषीय जोडीतील कोनांच्या विविध आकृती काढून त्यांतील कोन मोजून पाहा. प्रत्येक केली रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज किती येते? यावरून निष्कर्ष काढता येईल की

रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज १८० असते.

(२) आता काटकोनाचे आपण केलेले वर्णन लक्षात घ्या. रेषीय जोडीतील कोन एकरूप असतील तर ते कोन काटकोन असतात असे आपण म्हटले आहे.



आ. ३.३८

समजा ∠चखग व ∠चखक ही कोनांची रेषीय जोडी असून ∠चखग ≅ ∠चखक. अर्थात ∠चखग व ∠चखक काटकोन आहेत.

एकरूप कोनांची मापे सारखी असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

समजा m ∠चखग = m ∠चखक = य

आता ∠चखग व ∠चखक ही रेषीय जोडी असल्यामुळे

m ∠चखग + m ∠चखक = १८०

य + य = १८०

२ य = १८०

∴ य = ९०

∴ m ∠चखग = m ∠चखक = ९०

याचा अर्थ असा की काटकोनाचे माप ९० असते.

आता आपणास असेही म्हणता येईल की, ज्या कोनाचे माप ९० असते तो कोन काटकोन असतो.

(३) लघुकोन काटकोनापेक्षा लहान असतो.

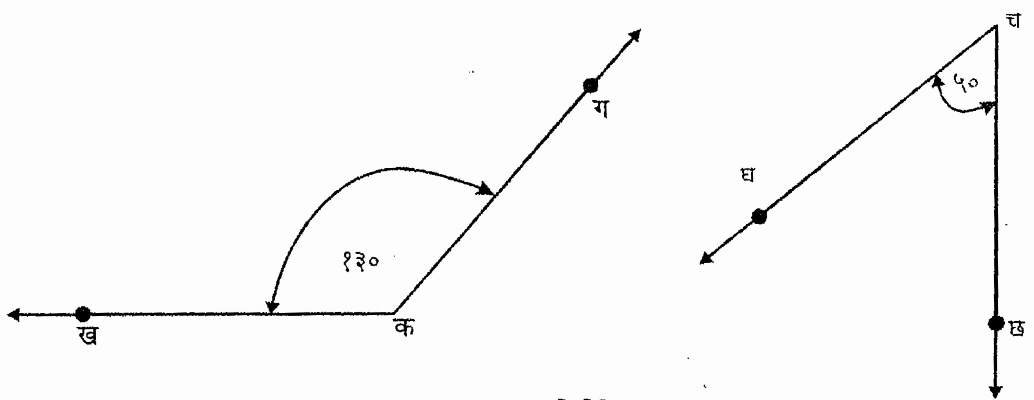
∴ लघुकोनाचे माप ९० पेक्षा कमी असते.

(४) विशालकोन हा काटकोनापेक्षा मोठा असतो.

∴ विशालकोनाचे माप ९० पेक्षा जास्त पण १८० पेक्षा कमी असते.

§ **~~3.18~~ पूरक कोन व कोटिकोन :**

(१) ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज १८० असते त्यांना (परस्परांचे) पूरक कोन (supplementary angles) म्हणतात.



आ. ३.३९

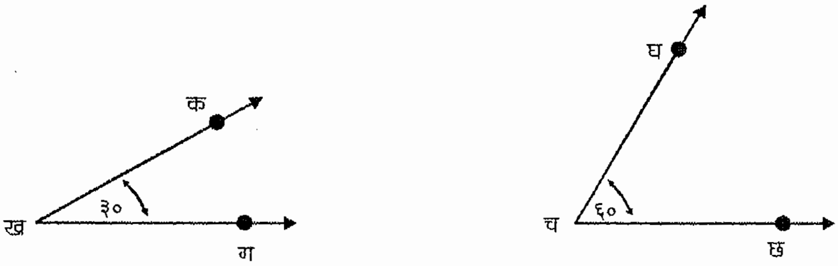
आ. ३.३९ मध्ये m ∠खकग = १३० व m ∠घचछ = ५०

m ∠खकग+m ∠घचछ = १३० + ५० = १८०

∴ ∠खकग हा ∠घचछ चा पूरक कोन आहे. तसेच ∠घचछ हा ∠खकग चा पूरक कोन आहे.

रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज १८० असते. म्हणून रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक असतात.

(२) ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज ९० असते त्यांना (परस्परांचे) कोटिकोन (complementary angles) म्हणतात.



आ. ३.४०

आ. ३.४० मध्ये m ∠कखग = ३० व m ∠घचछ =६०

m ∠कखग +m ∠घचछ = ९० ∴ ∠कखग हा ∠घचछ चा कोटिकोन आहे. तसेच, ∠घचछ हा ∠कखग चा कोटिकोन आहे.

वरील विवेचनावरून स्पष्ट होते की :-

(१) विशालकोनाचा पूरककोन लघुकोन असतो.

(२) लघुकोनाचा पूरककोन काटकोन असतो.

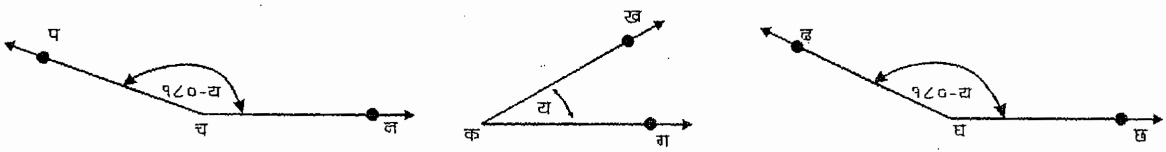
(३) काटकोनाचा पूरककोन काटकोन असतो.

(४) लघुकोनाचा कोटिकोन लघुकोन असतो.

(५) विशालकोनास कोटिकोन असण्याचा प्रश्नच उद्‌भवत नाही.

§ ~~3.19~~ **एकाच कोनाचे पूरक कोन व कोटिकोन यांची एकरूपता :** 3.19

(१) समजा, ∠क असा दिला आहे की m ∠क = य



आ. ३.४१

∠घ व ∠च यांपैकी प्रत्येक ∠क चा पूरक कोन आहे.

∠घ चे माप किती असेल?

∠क आणि ∠घ पूरक कोन आहेत.

∴m∠क+ m∠घ = १८०

य + m∠घ = १८०

∴m∠घ =१८०-य .... (१)

∠च चे माप किती असेल?

∠क व ∠च पूरक कोन आहेत.

∴m∠क + m∠च =१८०

य + m∠च =१८०

∴m∠च =१८०-य .... (२)

१ व २ वरून

$m\angle$घ = $m\angle$च

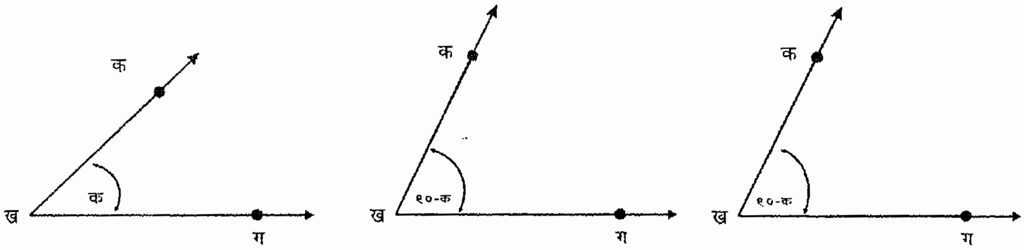
पण ज्या दोन कोनांची मापे सारखी असतात ते कोन एकरूप असतात.

$\therefore \angle$घ = $\angle$च

याचा अर्थ असा की

एकाच कोनाचे पूरक कोन एकरूप असतात.

(२) समजा $\angle$य असा दिला आहे की $m\angle$य = क



आ. ३.४२

$\angle$र व $\angle$ल पैकी प्रत्येक $\angle$य चा कोटिकोन आहे.

$m\angle$र = ?

$\angle$य व $\angle$र कोटिकोन आहेत.

$\therefore m\angle$य + $m\angle$र = ९०

क + $m\angle$र = ९०

$\therefore m\angle$र = ९०-क ....(१)

$m\angle$ल = ?

$\angle$य व $\angle$ल कोटिकोन आहेत.

$\therefore m\angle$य + $m\angle$ल = ९०

क + $m\angle$ल = ९०

$\therefore m\angle$ल = ९०-क............(२)

१ व २ वरून

$m\angle$र = $m\angle$ल.

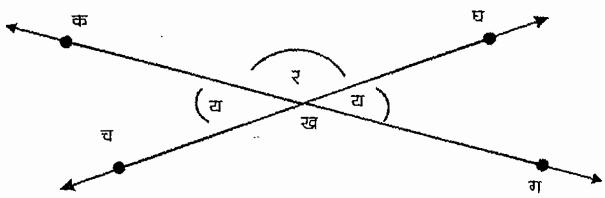
पण सारखी मापे असलेले कोन एकरूप असतात.

$\therefore m\angle$र $\cong \angle$ल.

याचा अर्थ असा की

एकाच कोनाचे कोटिकोन एकरूप असतात.

§ ३.२० परस्पर-विरुद्ध कोन :



आ. ३.४३

आ. ३.४३ पाहा. या आकृतीत रेषा कग व रेषा चघ एकमेकींना ख बिंदूत छेदीत असल्याच दाखवले आहे.
या आकृतीतील ∠घखग व ∠कखच यांच्या भुजांविषयी काय सांगता येईल?

∠घखग व ∠कखच यांच्या भुजा विरुद्ध किरण आहेत. अशा कोनांना **परस्पर-विरुद्ध कोन** किंवा **विरुद्ध कोन** (Vertically Opposite angles or Vertical angles) म्हणतात.

या निकषानुसार ∠कखघ व ∠चखग हेही परस्पर-विरुद्ध कोन आहेत.

ज्या दोन कोनांच्या विरुद्ध किरणांच्या दोन जोड्या तयार होतात त्या कोनांना परस्पर-विरुद्ध कोन किंवा विरुद्ध कोन म्हणतात.

एक रेषा दुसऱ्या रेषेला छेदते तेव्हा विरुद्ध कोनांच्या दोन जोड्या मिळतात.

आता समजा m∠घखग = य व m∠कखघ = र (आ. ३.४३).

∠घखग व ∠कखघ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

∴m∠घखग + m∠कखघ = १८०

य + र = १८०........(१)

आत ∠कखच व ∠कखघ हेही रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

∴m∠कखच + m∠कखघ = १८०

m∠कखच + र = १८०.......(२)

१ व २ वरून

m∠कखच + र = य + र

∴m∠कखच = य

पण m∠घखग = य

∴m∠घखग ≅ m∠कखच

∴∠घखग ≅ ∠कखच

याच पद्धतीने असे दाखवता येईल की

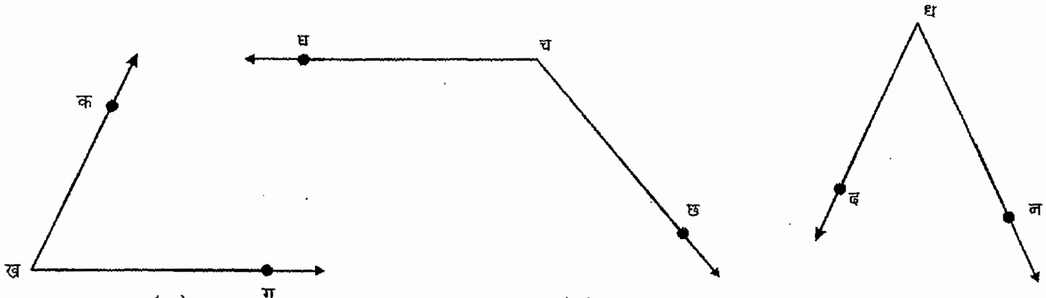
∠कखघ ≅ ∠चखग

याचा अर्थ असा की.....

परस्पर-विरुद्ध कोन एकरूप असतात.

§ ३.२१ प्रश्न :

१. खालील कोन मोजून त्यांची मापे सांगा.



(क) (ख) (ग)

आ. ३.४४

२. खालील मापांवरून कोन काढा.

(क) m∠ढणत = ४५; (ख) m∠दफड =१३०; (ग) m∠घचछ = ९०.

३. रिकाम्या जागा भरा.

(क) m∠दपफ = m∠चगघ

∴ ∠दपफ ≅ ....

(ख) रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज...........असते.

(ग) ∠खकग हा ∠यरल चा पूरक कोन आहे.

m∠यरल = ४७; तर m∠खकग =...........

(घ) m∠दधन हा m∠चछघ चा कोटिकोन आहे.

m∠दधन = ५४; तर m∠छचघ...........

(च) ∠कखग व ∠घखच हे परस्पर-विरूद्ध कोन आहेत.

∴ ∠कखग≅ ....

(छ) जर ∠यरल ≅ ∠घचछ व ∠घचछ ≅ ∠दधन;

तर ∠...........≅ ∠दधन.

४. खालील मापांच्या कोनांच्या पूरक कोनांची मापे सांगा.

(क) ५५; (ख) ८०; (ग) १४५; (घ) य; (च) य-र.

५. खालील मापाच्या कोनांच्या कोटिकोनांची मापे सांगा.

(क) ३०; (ख) ४७; (ग) ७३; (घ) ध.

६. खालीलपैकी कोणते विधान बरोबर व कोणते चूक आहे हे सांगा.

(क) रेषीय जोडीतील कोन नेहमी एकरूप असतात.

(ख) दोन रेषा परस्परांना छेदत असतील तर रेषीय कोनांच्या चार जोड्या मिळतात.

(ग) विशालकोनाचा पूरक कोन लघुकोन असतो.

(घ) एकाच कोनाचे पूरक कोन एकरूप असतात.

(च) एकरूप कोनांची मापे सारखी असण्याची जरूरी नाही.

(छ) रेषीय जोडीतील कोनांची मापे सारखी असतील तर प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

(ज) एकाच कोनाचे कोटिकोन एकरूप नसतात.

७. कोनाच्या शिरोबिंदूपासून कोनाच्या एका भुजेचा विरुद्ध किरण काढला तर होणाऱ्या कोनांना कोणते कोन म्हणता येईल?

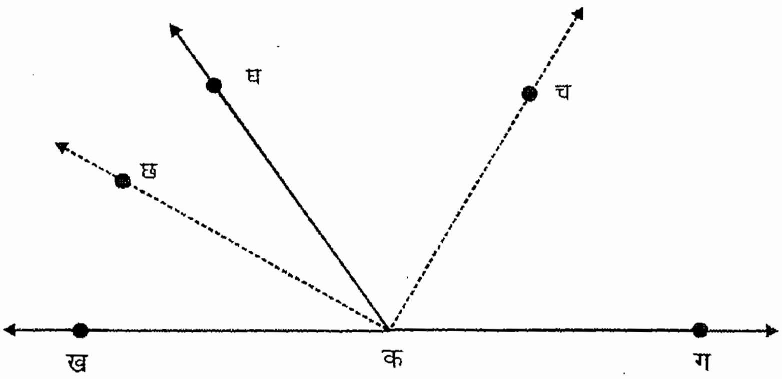
८. खालीलपैकी कोणत्या आकृतीचे सर्व कोन एकरूप असतात?

(क) आयत; (ख) समभुज चौकोन; (ग) समांतरभुज चौकोन; (घ) चौरस; (च) समभुज त्रिकोण.

स्वाध्याय

१. रिकाम्या जागा भरून खालील युक्तिवाद पूर्ण करा.

∠घकग आणि ∠घकख रेषीय जोडीतील कोन आहेत.



आ. ३.४५

किरण कच हा ∠घकग चा आणि किरण कछ हा ∠घकख चा दुभाजक आहे.

m∠घकग + m∠घकख = ... (कारण.......)

१/२ m∠घकग + १/२ m∠घकख =.........

पण १/२ m∠घकग = m∠घकच (कारण........)

आणि १/२ m∠घकख = m∠घकछ (कारण........)

∴m∠घकच + m∠घकछ = ...

पण m∠घकच + m∠घकछ =m∠छकच

∴m∠छकच =..........

∴रेषीय जोडीतील कोनांच्या दुभाजकांमधील समाविष्ट कोन हा ....असतो.

२. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. या कोनांच्या पूरक कोनांची मापे सांगा.

(क) य; (ख) य+र; (ग) १८०-क.

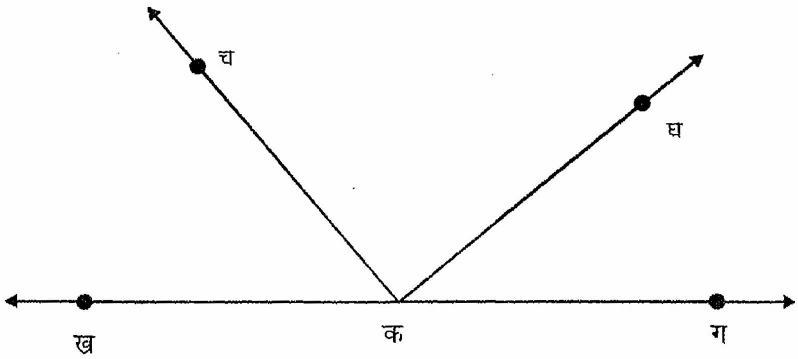
३. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. या कोनांच्या कोटिकोनांची मापे सांगा.

(क) ५३; (ख) क-ख; (ग) ९०-य.

४. जर दोन कोटिकोनांची मापे समान असतील तर प्रत्येक कोनाचे माप किती?

५. ∠ख हा ∠क चा कोटिकोन आहे. m∠ख = २m ∠क, तर ∠क चे माप किती?

६. ∠न हा ∠द चा पूरक कोन आहे. m∠न = ३m ∠द, तर ∠द चे माप किती?

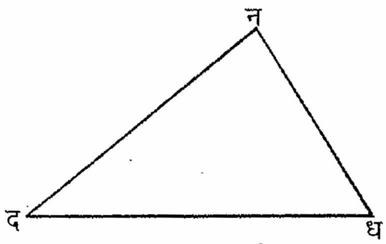


आ. ३.४६

७. आ. ३.४६ मध्ये ∠चकघ काटकोन आहे. जर m∠चकख = ध तर m∠घकग = ?

प्रकरण ४
त्रिकोण

या पुस्तकाच्या सुरुवातीच्या प्रकरणात (आणि क्वचित त्यापूर्वीही) 'त्रिकोण' या आकृतीची ओळख आपल्याला झालेली आहे. एकाच रेषेत येऊ शकणार नाहीत असे तीन बिंदू जर आपल्याला दिले असले तर ते परस्परांशी जोडून एक त्रिकोण तयार होतो.



आ. ४.१

द,ध,न हे जर नैकरेषिक असे तीन बिंदू दिले असतील तर यांना परस्परांशी जोडून आपण किती रेषाखंड मिळवू शकतो? या रेषाखंडांची नावे कोणती? रेख दध, रेख धन व रेख दन यांबाहेरील बिंदू, आपण तयार केलेल्या△दधन मध्ये नसतात हे आपल्याला माहित आहे.
म्हणून,

नैकरेषिक तीन बिंदू द,ध,न दिले असताना रेख दध, रेख धन व रेख दन यांचा संयोग म्हणजे△दधन होय.

असे त्रिकोणाचे वर्णन करता येईल.

§ **४.२ प्रश्न :**

(१)△ कखग म्हणजे कोणत्या तीन रेषाखंडांचा संयोग आहे?

(२) रेख णत, रेख तफ, व रेख णफ यांच्या संयोगाने एक त्रिकोण बनतो. त्याचे नाव सांगा.

(३) रेख कख, रेख खग व रेख कग यांचा संयोग म्हणजे त्रिकोण नसेल अशी एक आकृती काढा.

(४) पुढील विधान पूर्ण करा.

न हा बिंदू जर रेषा ___________ जर नसेल तर रेख ___________ , ___________ व ___________ यांचा संयोग म्हणजे △ दधन होय.

४.३ त्रिकोणाचे शिरोबिंदू व भुजा :

एका रेषेत नसणारे जे दिलेले तीन बिंदू साधून त्रिकोण तयार होतो, त्या बिंदूंना त्या त्रिकोणाचे शिरोबिंदू म्हणतात. उदाहरणार्थ आ. ४.१ मध्ये दाखवलेल्या त्रिकोणाचे द,ध व न हे शिरोबिंदू आहेत. त्रिकोणास तीनच शिरोबिंदू असतात.

त्रिकोणाच्या या शिरोबिंदूंना परस्परांस जोडणारे असे जे रेषाखंड असतात त्यांना त्या त्रिकोणाच्या भुजा म्हणतात. (किंवा बाजू असेही म्हणतात.)

तीन शिरोबिंदू जोडीजोडीने सांधल्यास नेमके तीनच रेषाखंड मिळतात. अर्थात कोणत्याही त्रिकोणास तीन भुजा असतात. आ. ४.१ मध्ये दाखवलेल्या त्रिकोणाच्या भुजा म्हणजे रेख दध, रेख धन व रेख दन होत.

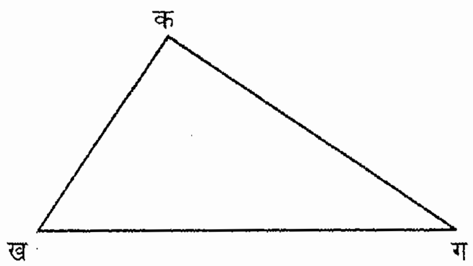
त्रिकोण हा त्याच्या भुजांचा संयोगसंचच असतो.

त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंच्या नावांवरून त्या त्रिकोणाचे नाव ठरते. जसे, शिरोबिंदू जर ण,त,फ असतील तर त्या त्रिकोणाचे नाव△णतफ असे ठरते. त्रिकोणाच्या बाबतीत त्याच्या नावातील अक्षरांचा क्रम कोणताही घेतला तरी काही

बिघडत नाही. उदाहरणार्थ△णतफ व △तफण हे एकच होत. △तणफ हा ही काही वेगळा नव्हे. या सर्वांच्या भुजाही त्याच व शिरोबिंदूही तेच.

टीप : त्रिकोणाची भुजा सांगताना (किंवा लिहिताना) कित्येकदा रेख कख ही भुजा असे म्हणण्याऐवजी फक्त भुजा कख एवढेच म्हटले जाते (किंवा लिहिले जाते.)

४.४ शिरोबिंदूची संमुख भुजा व भुजेचा संमुख शिरोबिंदू :



क, ख व ग हे जर त्रिकोणाचे तीन शिरोबिंदू असतील तर रेख खग ही क च्या समोर असल्याने ती क ह्या शिरोबिंदूची संमुख भुजा म्हणून ओळखली जाते. ख ह्या शिरोबिंदूची संमुख भुजा म्हणजे रेख कग होय. अर्थातच क ह्या शिरोबिंदूची संमुख भुजा रेख कख होईल. तसेच, क हा शिरोबिंदू , भुजा खग चा संमुख शिरोबिंदू म्हणून ओळखला जातो.

ग हा कोणत्या भुजेचा संमुख शिरोबिंदू होतो?

भुजा कग चा संमुख शिरोबिंदू कोणता?

त्रिकोणामध्ये, प्रत्येक शिरोबिंदू हा एका (व नेमक्या एकाच) भुजेच्या संमुख असतो, आणि प्रत्येक भुजा ही नेमक्या एकाच शिरोबिंदूच्या संमुख असते.

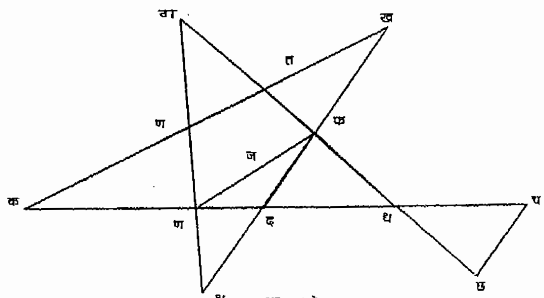
त्रिकोणाच्या एखादया भुजेत नसणारा त्याचा जो शिरोबिंदू असतो तोच, त्या भुजेच्या संमुख असतो हे सरळ आहे व एव्हाना तुमच्या लक्षात आले असेल.

त्रिकोणाची एक भुजा व तिचा संमुख शिरोबिंदू यांच्या नावांवरून त्या त्रिकोणाचे नाव सहज सांगता येते. उदाहरणार्थ, एखादया त्रिकोणात
ण हा जर रेख खग च्या संमुख असणारा शिरोबिंदू असेल तर त्या त्रिकोणाचे नाव △णखग असले पाहिजे.

त्रिकोणाच्या भुजेची लांबी संमुख शिरोबिंदूच्या नावावरून लिहिण्याची प्रथा आहे. म्हणजे आ. ४.२ च्या संदर्भात, रेख कख या भुजेचा संमुख शिरोबिंदू क असेल तर (कख) चा उल्लेख क या अक्षराने करतात. याच आकृतीत ख म्हणजे रेख कग ची लांबी होश. तसेच (खग)=क.

(या पद्धतीने त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबी दाखविण्यासाठी लहान अक्षरे वापरावयाची असा संकेत आहे.)

४.५ प्रश्न :



आ. ४.३

१. △यनप चे शिरोबिंदू सांगा.

२. △दनफ च्या भुजा सांगा.

३. आ. ४.३ मध्ये जाड रेघांनी दाखवलेल्या त्रिकोणाचे नाव लिहा, शिरोबिंदूंची नावे लिहा व भुजांची नावे लिहा.

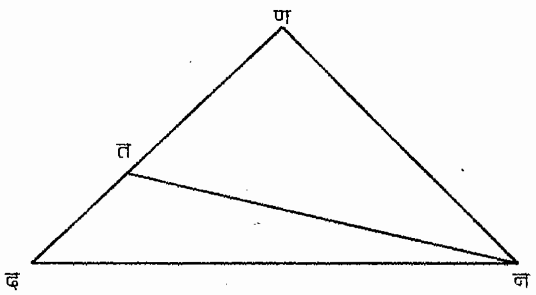
४. आ. ४.३ मध्ये, △कखद च्या भुजांची नावे लिहा.

५. आ. ४.३ मध्ये, (१) △गनध या त्रिकोणाची न ची संमुखभुजा कोणती?

(२) △नदफ ची, न ची संमुखभुजा कोणती?

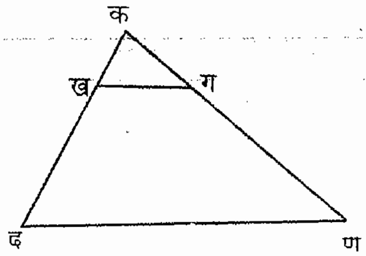
(३) △कघच पूर्ण केल्यास क हा कोणत्या भुजेचा संमुख शिरोबिंदू होईल?

६. आ. ४.४ मध्ये दिसणाऱ्या सर्व त्रिकोणांची नावे लिहा.



आ. ४.४

७. आ. ४.५ मध्ये



आ. ४.५

△कखग हा △कदण चा उपसंच आहे काय?

(△कखग चे सर्व बिंदू △कदण मध्ये आहेत काय?)

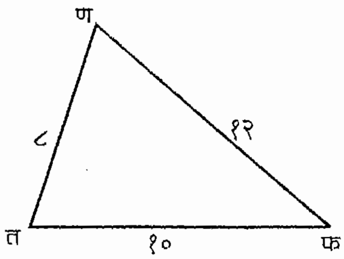
८. आ. ४.३ मध्ये,

(१) न हा बिंदू , △गफघ मध्ये आहे काय?

(२) रेख नफ चे सर्व बिंदू △गफघ मध्ये आहेत काय?

(३) △गफघ मध्ये, रेख गफ, रेख फघ, रेख गघ यांच्या बिंदूशिवाय जर आणखी कोणत्या रेषाखंडाचे बिंदू येत असतील तर त्या रेषाखंडाचे नाव लिहा.

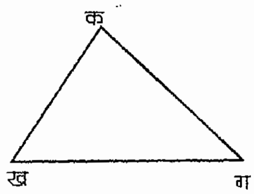
९. आ. ४.६ मध्ये, △णतफ च्या भुजांची लांबी संबंधित भुजेच्या बाजूस लिहून दाखवल्या आहेत. त्यावरून पुढील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा :-



आ. ४.६

(१) m = l(NT) = ...
(२) n = ...= .....
(३)......= ..... = t

४.६ त्रिकोणाचे कोन :

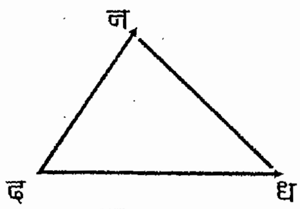


आ. ४.७

△कखग दिला असता, ∠कखग, ∠खकग, ∠खकग हे जे तीन कोन होतात, त्यांना त्या **त्रिकोणाचे कोन** म्हणून संबोधतात. प्रत्येक त्रिकोणाचे असे तीन कोन असतात व तो एकेक कोन त्या त्रिकोणाच्या एकेका शिरोबिंदूजवळ होत असतो.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही शिरोबिंदूशी निगडित असणाऱ्या दोन भुजा ह्या, त्या शिरोबिंदूशी उगम पावणाऱ्या दोन किरणांचे भाग असतात. उदाहरणार्थ, आ. ४.७ मध्ये, ख ह्या शिरोबिंदूशी निगडित असणाऱ्या भुजा खग व खक ह्या अनुक्रमे किरण खग व किरण खक चे भाग आहेत. या किरणांनी केलेला कोन, ∠कखग हा या **त्रिकोणाचा** एक कोन होय. △कखग चा ∠खकग हा कोन असाच, किरण कख व किरण कग यांनी केलेला कोन आहे. या किरणांमध्ये त्या त्रिकोणाच्या अनुक्रमे रेख कख व रेख कग ह्या भुजा आहेत.

△कखग चा, ∠खगक ज्या किरणांनी होतो, त्या किरणांत असणाऱ्या △कखग च्या भुजांची नावे कोणती?



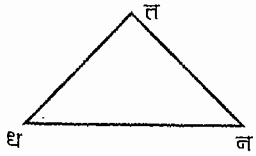
आ. ४.८

त्रिकोणांच्या भुजांनी केलेला कोन असे जेव्हा म्हटले जाते, तेव्हा त्याचा अर्थ, संबंधित भुजांच्या किरणांनी केलेला कोन असा घ्यावयाचा असतो. उदाहरणार्थ, △दधन च्या भुजा दध व भुजा दन यांनी केलेला कोन म्हणजे ∠दधन होय.

अर्थात हा कोन, किरण दध व किरण दन यांनी झालेला आहे. (आ. ४.८ पाहा.)

त्रिकोणाच्या दोन भुजांनी कोन ठरून जातो हे जरी खरे असले तरी त्या कोनामध्ये, त्या दोन भुजांबाहेरचे कित्येक बिंदू असतात.

४.७ प्रश्न :



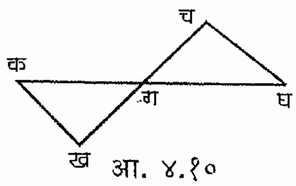
आ. ४.९

१. आ. ४.९ मध्ये दाखवलेल्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांची नावे लिहा.

२. △कणफ च्या कोनांची नावे लिहा.

३. △नपफ चा कोणता कोन, रेख नफ व रेख पफ या भुजांनी झाला आहे?

४.

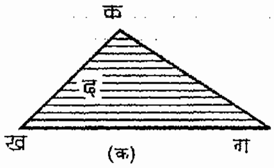


आ. ४.१०

आ. ४.१० मध्ये, △कगख चा ∠क हा त्या त्रिकोणाच्या कोणत्या दोन भुजांनी झाला आहे?

या भुजांमध्ये नसणारा एखादा बिंदू , ∠क मध्ये आहे, असे वाटल्यास तो बिंदू लिहा.

४.८ त्रिकोणाचा आंतरभाग

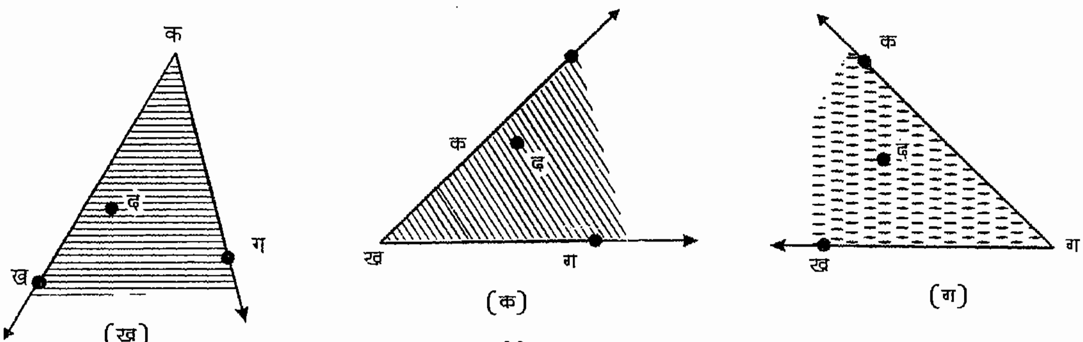


आ. ४.११ (क)

आ. ४.११ (क) मध्ये ▦ अशा खुणांनी दाखवलेल्या भागास △कखग चा आंतरभाग (Interior) म्हणून आपण ओळखतो.

या भागाल कोठेही जर द हा बिंदू असेल तर द हा बिंदू △कखग च्या आंतरभागात आहे असे आपण म्हणतो. त्रिकोणाच्या भुजांवर जे बिंदू आहेत ते मात्र अर्थातच, त्या त्रिकोणाच्या आंतरभागात नसतात.

त्रिकोणाच्या कोनांचे आंतरभाग व त्या त्रिकोणाचा आंतरभाग यांचा संबंध आता आपण पाहू.



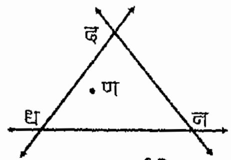
आ. ४.११

आ. ४.११ मध्ये दाखवलेला द हा बिंदू, त्या त्रिकोणाच्या ∠क च्या आंतरभागात आहे काय ते पाहा.

हाच द बिंदू, त्या त्रिकोणाच्या ∠ख च्या आंतरभागात आहे काय? द हा ∠ग च्या आंतरभागात आहे काय?

एखादा बिंदू जेव्हा, △कखग च्या आंतरभागात असतो तेव्हा तो, त्या त्रिकोणाच्या ∠क, ∠ख व ∠ग अशा तीन कोनांपैकी प्रत्येकाच्या आंतरभागात असतो हे आता उघड झाले.

तुमच्या वहीच्या कागदावर एक त्रिकोण काढा. त्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांचे आंतरभाग निरनिराळ्या खुणांनी (ओळखू येतील अशा प्रकारे) दाखवा.



आ. ४.१२

तीनही आंतरभागांना सामाईक असणारा (म्हणजे त्यांच्या छेदसंचात असणारा) एखादा बिंदू घ्या. हा बिंदू त्या त्रिकोणाच्या आंतरभागात आहे की नाही ते पाहा.

वरील अनुभवाच्या मदतीने, त्रिकोणाच्या आंतरभागातील बिंदूंचे व एकूण त्या आंतरभागाचे वर्णन आपण पुढीलप्रमाणे करू शकतो.

जो बिंदू दिलेल्या त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोनाच्या आंतरभागात असतो तो बिंदू त्या त्रिकोणाच्या आंतरभागात असतो. दिलेल्या त्रिकोणाच्या तीन कोनाच्या आंतरभागांचा छेदसंच म्हणजे त्या त्रिकोणांचा आंतरभाग होय.

वर सांगितलेली, त्रिकोण काढण्याची व त्याच्या कोनांचे आंतरभाग वेगवेगळ्या खुणांनी दाखवण्याची कृती करीत असताना तुमच्या हे लक्षात आले असेल की, त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या आंतरभागात सामाईकपणे असणारा प्रत्येक बिंदू , त्या त्रिकोणाच्या तिसऱ्या कोनाच्या आंतरभागात असतोच. यावरून, असेही आपल्याला म्हणता येईल की,

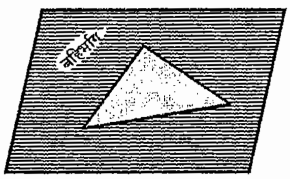
त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांच्या आंतरभागांचा छेदसंच
म्हणजे त्या त्रिकोणाचा आंतरभाग होय.

कोनाचा आंतरभाग हा त्या कोनाच्या प्रतलाचाच एक भाग असतो. म्हणजे असे की, जे बिंदू कोनाच्या प्रतलातच नाहीत ते त्याच्या आंतरभागात राहू शकत नाहीत.

तसेच **त्रिकोणाचा आंतरभाग हा त्या त्रिकोणाच्या प्रतलाचाच एक भाग असतो.**

त्रिकोणाच्या प्रतलात असणाऱ्यांपैकी काही बिंदू (हे कोणते ते वर आलेच आहे.) त्या त्रिकोणाच्या आंतरभागात असतात. जे त्या त्रिकोणाच्या प्रतलातच नाहीत ते त्या त्रिकोणाच्या आंतरभागात राहण्याचा प्रश्नच उद्भवत नाही.

४.९ त्रिकोणाचा बहिर्भाग :



आ. ४.१३

त्रिकोणाच्या प्रतलातील जे बिंदू त्या त्रिकोणांचे बिंदू नाहीत किंवा त्या त्रिकोणाच्या आंतरभागातही नाहीत, अशा बिंदूंचा संच म्हणजे त्या त्रिकोणाचा बहिर्भाग होय. आ. ४.१३ मध्ये त्रिकोणाचा बहिर्भाग छायांकित करून दाखवला आहे.

त्रिकोणाच्या भुजांचे बिंदू अर्थातच या बहिर्भागात नसतात.

४.१० त्रिकोणी क्षेत्र :

त्रिकोण व त्याचा आंतरभाग यांच्या संयोगसंचास त्रिकोणी क्षेत्र (triangular region) म्हणतात.

दिलेल्या त्रिकोणाचे हे त्रिकोणी क्षेत्र जर त्या त्रिकोणाच्या प्रतलातून वगळले तर प्रतलाचा उरणारा भाग म्हणजेच त्या त्रिकोणाचा बहिर्भाग होतो हे आता ओघानेच आले.



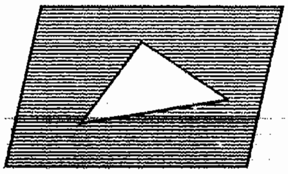
आ. ४.१४

त्रिकोणाचा आंतरभाग बहिर्वक्र संच असतो. (आ. ४.१४)



आ. ४.१५

त्रिकोणी क्षेत्रसुद्धा बहिर्वक्र संच असते. (आ. ४.१५)



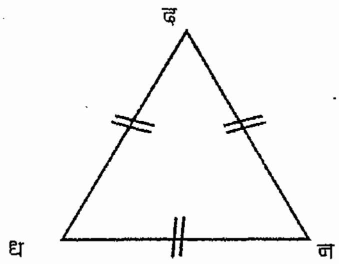
आ. ४.१६

त्रिकोणाचा बहिर्भाग मात्र बहिर्वक्र संच नसतो. (आ. ४.१६)

४.११ त्रिकोणांचे प्रकार :

भुजांच्या लांबी व कोनांची मापे यांवरून त्रिकोणांचे वेगवेगळे प्रकार पडतात. त्या प्रकारांची माहिती येथे आपल्याला करून घ्यावयाची आहे. प्रथम, आपण त्रिकोणांचे त्यांच्या भुजांच्या लांबीवरून पडणारे प्रकार पाहू.

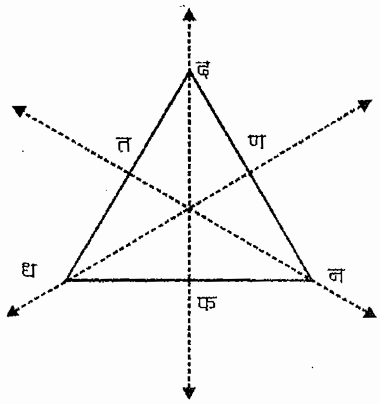
(१) समभुज त्रिकोण :



आ. ४.१७

त्रिकोणाच्या तिन्ही भुजा जर परस्पर एकरूप असतील तर (म्हणजेच जर तिन्ही भुजा समान लांबीच्या असतील तर) त्या त्रिकोणास समभुज त्रिकोण म्हणतात. आ. ४.१७ मध्ये असा एक समभुज त्रिकोण दाखवला आहे.

समभुज त्रिकोणाचे सगळे कोन सारख्याच मापाचे असतात.

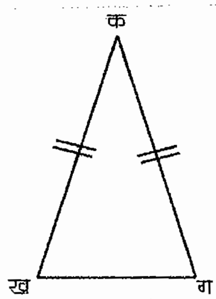


आ. ४.१८

समभुज त्रिकोणाचा कोणताही शिरोबिंदू व त्याच्या संमुख भुजेचा मध्यबिंदू यांतून जाणाऱ्या रेषेवर जर कागदास मोड घातली तर त्या त्रिकोणाचा एक भाग दुसऱ्या भागाशी तंतोतंत जुळतो.

आ. ४.१८ मध्ये त,फ,ण हे अनुक्रमे रेख दध, रेख धन व रेख दन यांचे मध्यबिंदू आहेत. रेषा दन, रेषा नत, रेषा YU `n\$H$ H$bË`rhr a\da H$dX XpS>`rg △दधन चा एकीकडील भाग दुसरीकडील भागाशी तंतोतंत जुळतो.

(२) समद्विभुज त्रिकोण :

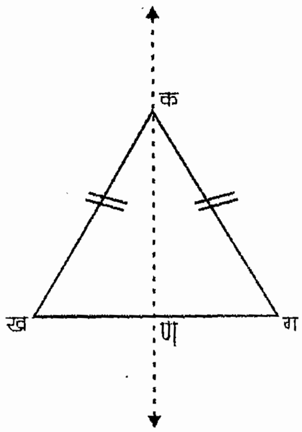


आ. ४.१९

त्रिकोणाच्या दोन भुजा जर एकरूप असतील तर (म्हणजे दोन भुजा जर समान लांबीच्या असतील तर) त्या त्रिकोणास समद्विभुज त्रिकोण म्हणतात.

अशा तऱ्हेचा कोणताही समद्विभुज त्रिकोण तुम्ही काढून पाहा व त्याचे कोन मोजून पाहा. तीनपैकी दोन कोन हटकून सारख्या मापाचे आढळतील. सारख्या मापाचे आढळून आलेले हे कोन, त्या समान लांबीच्या भुजांच्या संमुख असतात असेही दिसेल. निष्कर्ष असा की,

समद्विभुज त्रिकोणात, एकरूप भुजांचे संमुख कोन एकरूप असतात.

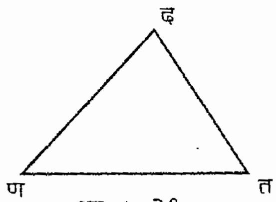


आ. ४.२०

एका कागदावर $\triangle$कखग हा समद्‌विभुज त्रिकोण होईल अशी आकृती काढा. ज्या भुजा समान लांबीच्या आहेत, त्यांना कख आणि कग अशी नावे दया. रेख खग ही जी तिसरी भुजा आहे तिचा मध्यबिंदू घ्या. त्याला ण असे नाव दया. (आ.४.२० पाहा.) आता रेषा कण काढा व या रेषेवर कागदास घडी घाला. ख व ग हे शिरोबिंदू एकमेकांवर पडतात. रेख कख व रेख कग एकमेकांशी जुळतात असे दिसून येईल.

रेषा कण ही रेख खग शी काटकोन करते असेही दिसून येईल.

(३) विषमभुज त्रिकोण :



आ. ४.२१

दिलेला त्रिकोण समभुज नसेल वा समद्‌विभुजही नसेल तर (म्हणजे त्याच्या कोणत्याच दोन भुजांची लांबी सारखी नसेल तर) अशा त्रिकोणास विषमभुज त्रिकोण म्हणतात. (आ. ४.२१ पाहा.)

विषमभुज त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांपैकी कोणतीही दोन घेतली तरी ती असमानच असतात असे दिसून येईल.

विषमभुज त्रिकोणाला दुमडून एक भाग तंतोतंत दुसऱ्या भागावर पाडणे शक्य नसते.

४.१२ कोनांच्या मापांवरून होणारे त्रिकोणांचे प्रकार :

(१) काटकोन त्रिकोण :

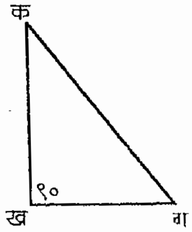
त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी एखादा जर काटकोन असेल तर त्या त्रिकोणास काटकोन त्रिकोण म्हणतात.

तुम्ही आपल्या वहीवर कोणताही एक काटकोन त्रिकोण काढा. (त्यासाठी आधी एक काटकोन काढा व त्याच्या दोन भुजांवर एकेक बिंदू घ्या. हे दोन बिंदू एकमेकांशी जोडा म्हणजे एक काटकोन त्रिकोण तयार होईल.) या त्रिकोणाच्या उरलेल्या दोन कोनांची मापे मोजा. या प्रत्येक कोनाचे माप ९० पेक्षा कमीच असल्याचे आढळेल. अनुभव हा की

काटकोन त्रिकोणाचे काटकोनाव्यतिरिक्तचे दोन कोन हे प्रत्येकी लघुकोनच असतात.

काटकोन त्रिकोणात जास्तीत जास्त एकच कोन काटकोन असतो असे म्हणतात ते यामुळेच. काटकोन त्रिकोणाच्या ज्या शिरोबिंदूशी काटकोन आहे, त्या बिंदूच्या संमुख भुजेस त्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण असे म्हणतात. आ. ४.२२ मध्ये

रेख कग हा कर्ण आहे. कर्ण हा शब्द कित्येकदा त्रिकोणाच्या काटकोनासमोरील भुजेची **लांबी** म्हणूनही वापरला जातो. उदाहरणार्थ आ. ४.२२ मधील काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ३ सेमी. आहे याचा अर्थ l(कग)=३ सेमी.



आ. ४.२२

काटकोन त्रिकोणाच्या ज्या शिरोबिंदूशी काटकोन असतो त्या शिरोबिंदूस काटकोनबिंदू असेही म्हणतात.

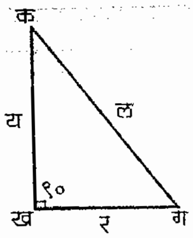
तुम्ही काढलेल्या काटकोन त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंच्या लांबी मोजा. त्यांचा वाढता क्रम लावा. कोणत्या बाजूची लांबी सर्वांत जास्त आहे? आणखी काही काटकोन त्रिकोण काढून पाहा. त्या प्रत्येकात, सर्वांत मोठी भुजा कोणती निघते ते पाहा.

काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ही त्याची सर्वांत मोठी भुजा असते.

काटकोन त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबीसंबंधाने एक महत्त्वाचा गुणधर्म खाली दिला आहे.

तुम्ही काढलेल्या काटकोन त्रिकोणांपैकी कोणत्याही एका त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबीचे आकडे आपल्यासमोर ठेवा.

या लांबींचे वर्ग करा.



आ. ४.२३

उदाहरणार्थ, आ. ४.२३ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे.,

l(कख)= य, l(~~खग~~)= र व l(कग)= ल आहे, तर या लांबीचे वर्ग अनुक्रमे $य^२$, $र^२$ व $ल^२$ होतील.

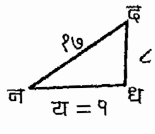
आता, कर्णाचा वर्ग $ल^२$, सोडून राहिलेल्या दोन वर्गांची बेरीज करा.

ही बेरीज (म्हणजे आ. ४.२३ मध्ये $य^२ + र^२$) कर्णाच्या वर्गाएवढीच येते.

$$य^२ + र^२ = ल^२.$$

हा नियम **पायथॅगोरसचे प्रमेय** म्हणून भूमितीत प्रसिद्ध आहे हे तुम्हांला माहीतच आहे.

या नियमावरून, काटकोन त्रिकोणाच्या तीनपैकी कोणत्याही दोन भुजांची लांबी माहीत असल्यास तिसऱ्या भुजेची लांबी गणिताने काढता येते. याबाबत खालील उदाहरण पाहा.



आ. ४.२४

△दधन या काटकोन त्रिकोणाच्या तीनपैकी कोणत्याही दोन भुजांची लांबी माहीत असल्यास तिसऱ्या भुजेची

लांबी गणिताने काढता येते. याबाबत खालील उदाहरण पाहा.

$\triangle$दधन या काटकोन त्रिकोणाचा रेख दन हा कर्ण १७ मापे लांबीचा आहे व रेख दध ही भुजा ८ मापे लांब आहे, तर रेख धन या भुजेची लांबी किती?

आपण l(धन)= य घेऊ.

मग $८^२ + य^२ = १७^२$ होईल.

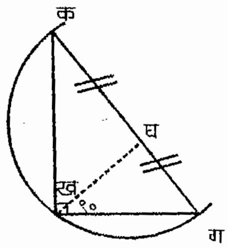
$\therefore$ ६४ + $य^२$ = २८९

$\therefore य^२$ = २२५

व म्हणून य = $\sqrt{२२५}$

= १५ मापे.

काटकोन त्रिकोणाचा आणखी एक गुणधर्म :



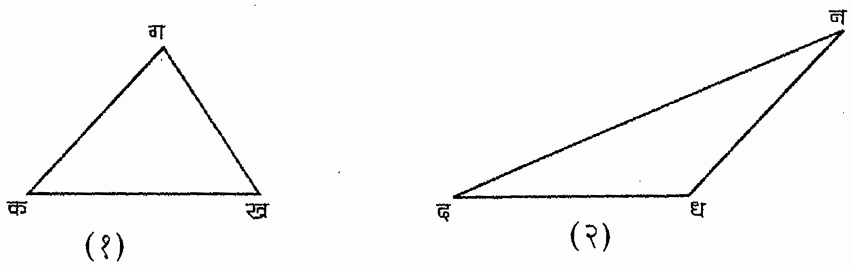
आ. ४.२५

तुम्ही काढलेल्या एखादया काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाचा मध्यबिंदू घ्या. या बिंदूच्या ठिकाणी कंपासचे लोखंडी टोक ठेवा. कंपासचे दुसरे (पेन्सिलचे) टोक, त्या त्रिकोणाच्या कर्णाच्या एका टोकावर ठेवा आणि एक वर्तुळ काढा.

हे वर्तुळ त्या त्रिकोणाच्या तिन्ही शिरोबिंदूतून जाते असे आढळून येईल. हे वर्तुळ कर्णाच्या दोन्ही टोकांतून जावे हे अपेक्षितच होते. (का?) पण हे वर्तुळ कर्णाच्या संमुख शिरोबिंदूतूनही गेले हे विशेष. कर्णाच्या मध्यबिंदूचे, काटकोन बिंदूपासून अंतर मोजा. हे अंतर कर्णाच्या लांबीच्या निम्मे असते असे आढळून येईल. आ. ४.२५ मध्ये, $\triangle$कखग हा काटकोन त्रिकोण आहे. घ हा कर्णाचा मध्यबिंदू आहे. येथे l(घख)=१/२ l(कग) होते.

जर क व ग यांमधील अंतर १० सेमी. असेल तर ख व घ मधील अंतर किती असेल?

(२) विशालकोन त्रिकोण :



आ. ४.२६

त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी एक कोन हा जर विशालकोन असेल तर त्या त्रिकोणास विशालकोन त्रिकोण म्हणतात.

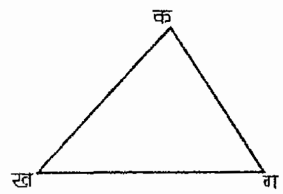
आ. ४.२६ मध्ये विशालकोन त्रिकोण दाखवले आहेत. आ. ४.२६ (१) मध्ये $\angle$ग हा विशालकोन आहे. आ. ४.२६ (२) मध्ये $\angle$ध हा विशालकोन आहे.

त्रिकोणाचा एक कोन विशालकोन असला (माप ९० पेक्षा मोठे) की इतर दोन कोनांपैकी प्रत्येक कोन हा लघुकोनच

असतो (माप ९० पेक्षा लहान). याचा पडताळा पाहण्यासाठी विशालकोन त्रिकोण काढून त्याच्या कोनांची मापे मोजून पाहा.

विशालकोन त्रिकोणात, विशालकोनासमोरील भुजा ही इतर भुजांपैकी प्रत्येकीकडून मोठी असते.

(३) लघुकोन त्रिकोण :

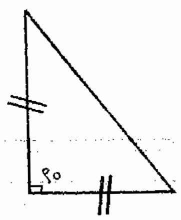


आ. ४.२७

त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी प्रत्येक कोन जर लघुकोन असेल (माप ९० पेक्षा लहान) तर त्या त्रिकोणास लघुकोन त्रिकोण म्हणतात. आ. ४.२७ मध्ये दाखवलेला त्रिकोण हा एक लघुकोन त्रिकोण आहे.

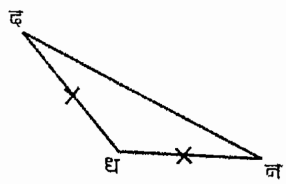
§ ४.१३ त्रिकोणाचे, कोनांवरून होणारे प्रकार व भुजांच्या लांबीवरून होणारे प्रकार हे एकमेकांपासून अगदीच वेगळे आहेत असे काही नाही. यासंबंधी खुलासा पुढे केला आहे.

(१) काटकोन त्रिकोण हा समद्विभुज असू शकतो. मात्र काटकोन त्रिकोण हा समभुज असू शकत नाही.



आ. ४.२८

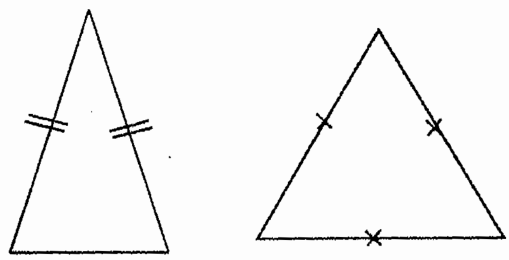
(२) विशालकोन त्रिकोण हा समद्विभुज असू शकतो. मात्र, विशालकोन त्रिकोण हा कदापिही समभुज असणार नाही.



आ. ४.२९

(३) लघुकोन त्रिकोण हा समद्विभुज असू शकतो. लघुकोन त्रिकोण हा समभुजदेखील असू शकतो.

(४) समद्विभुज त्रिकोण हा काटकोन त्रिकोण असू शकतो. (आ. ४.२९) समद्विभुज त्रिकोण हा विशालकोन त्रिकोण असू शकतो. (आ. ४.२९)

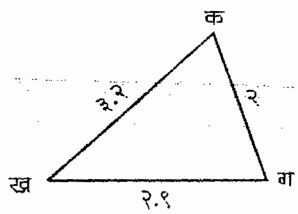


(१) (२)

आ. ४.३०

समद्विभुज त्रिकोण हा लघुकोन त्रिकोण सुद्धा असू शकतो. (आ. ४.३० (१))
(५) समभुज त्रिकोण हा लघुकोन त्रिकोणच असू शकतो. (आ.४.३० (२))
समभुज त्रिकोण हा काटकोन त्रिकोण असू शकत नाही.
समभुज त्रिकोण हा विशालकोन त्रिकोणदेखील असू शकत नाही.

४.१४ कागदावर कोणताही एक त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाच्या तिन्ही भुजांच्या लांबी मोजा. तसेच तीनही कोनांची मापे मोजा. कोणत्याही दोन भुजा विचारात घ्या. यांपैकी जी मोठी असेल तिचा संमुखकोन, दुसऱ्या (लहान) भुजेच्या संमुख असणाऱ्या कोनापेक्षा मोठा असतो. ह्या विधानाचा पडताळा घ्या.



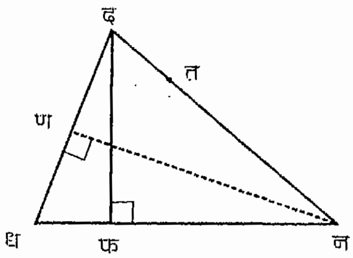
आ. ४.३१

△कखग च्या तीन भुजांच्या लांबी पुढीलप्रमाणे आहेत, असे समजा. (आ. ४.३१)
l(कख)= ३.२, l(खग)= २.९ आणि l(कग)= २.

अर्थातच येथे रेख कख चा संमुख कोन, ∠ग हाच △कखग च्या सर्व कोनांत मोठा राहील.

४.१५ कोणत्याही त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबीचे आकडे पाहिल्यास असे दिसते की, त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन भुजांच्या लांबींची बेरीज ही तिसऱ्या भुजेच्या लांबीपेक्षा मोठीच असते. वरील विधानाचा पडताळा घेण्यासाठी, तुम्ही काढलेल्या एखादया त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबी मोजा. सर्वांत मोठी भुजा सोडून राहिलेल्या दोन लांबींची बेरीज करा. ही बेरीज, त्या सर्वांत मोठ्या भुजेच्या लांबीहून मोठी असल्याचे आढळेल. म्हणजे असे की, एखादया त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबी, समजा १०,९,३ अशा आहेत. तर ९+३ ही बेरीज १० हून मोठी आहे. (१० + ३ > ९ हे तर असणारच.)

४.१६ शिरोलंब :



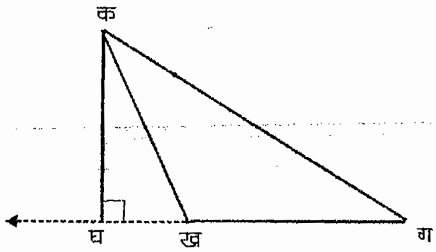
आ. ४.३२

त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून, संमुख भुजेवर काढलेल्या लंबरेषाखंडास त्या त्रिकोणाचा शिरोलंब म्हणतात.

प्रत्येक त्रिकोणास असे तीन व नेमके तीनच शिरोलंब असतात हे उघड आहे.

आ. ४.३२ मध्ये △दधन चे, असे दोन शिरोलंब दाखवले आहेत. एक, रेख दफ व दुसरा रेख नण आहे. तिसरा शिरोलंब, रेख दन ला त या बिंदूत छेदत असेल तर त्या शिरोलंबाचे नाव काय?

शिरोलंबाच्या लांबीसच, त्या त्रिकोणाची उंची म्हणतात. अर्थातच ही उंची, ज्या पायावर तो शिरोलंब काढला आहे, त्या पायाच्या संदर्भात असते.



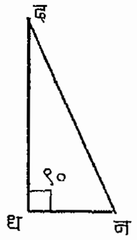
आ. ४.३३

शिरोलंबाबाबत एक महत्त्वाची गोष्ट अशी की, हा लंब शिरोबिंदूपासून काढलेला असतो व तो संमुख भुजेच्या रेषेपर्यंत काढलेला असतो.

शिरोलंबाचे एक टोक म्हणजे त्रिकोणाचा शिरोबिंदू असतो, व दुसरे टोक, त्या शिरोबिंदूच्या संमुख भुजेच्या रेषेत असते. हे दुसरे टोक, त्या संमुख भुजेत असेलच असे नाही.

उदाहरणार्थ, आ. ४.३३ मध्ये, क पासून काढलेल्या शिरोलंबाचे दुसरे टोक घ आहे. ते रेषा खग मध्ये आहे, पण रेख गख च्या मात्र बाहेर आहे. असे होण्याचे कारण म्हणजे ∠कखग हा **विशालकोन** आहे हेच होय, हेच तुमच्या लक्षात आले असेलच. जर ∠कगख हा विशालकोन असता तरीदेखील क पासून काढलेल्या शिरोलंबाचे दुसरे टोक, रेख खग च्या बाहेर राहिले असते.

असे जरी असले तरी, प्रथेप्रमाणे शिरोलंब म्हणजे शिरोबिंदूपासून संमुखभुजेपर्यंत काढलेला लंब असेच म्हटले जाते.

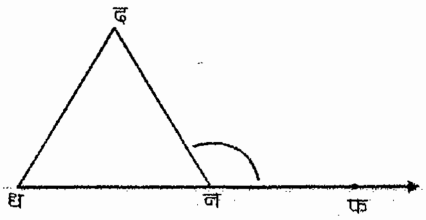


आ. ४.३४

काटकोन त्रिकोणात शिरोलंबाबाबत एक वेगळीच परिस्थिती निर्माण होते. आ. ४.३४ मध्ये, △दधन हा एक काटकोन त्रिकोण आहे. रेख दन हा त्याचा कर्ण आहे. द या शिरोबिंदूपासून शिरोलंब काढल्यास त्याचे दुसरे टोक कोठे राहील? ते टोक ध पासून वेगळे असणार नाही. रेख दध हा स्वतःच शिरोलंब होईल. रेख नध ही भुजादेखील स्वतः शिरोलंब आहे.

४.१७ त्रिकोणाचा बाह्यकोन :

त्रिकोणाच्या एखादया कोनाशी, ज्या कोनाची रेषीय जोडी होते, त्या कोनास त्या त्रिकोणाचा बाह्यकोन असे म्हणतात.



आ. ४.३५

प्रत्येक त्रिकोणास, असे किती ठिकाणी बाह्यकोन असतील?

एक त्रिकोण काढा व त्याचा असा एखादा बाह्यकोन काढून तो मोजा.

बाह्यकोनाचे माप हे, त्याच्याशी संलग्न नसणाऱ्या दोन आंतरकोनां पैकी प्रत्येकाच्या मापापेक्षा मोठे असते.

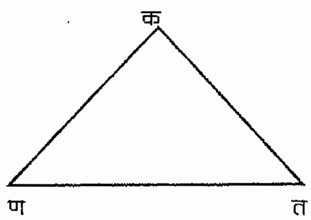
याचा पडताळा घ्या.

आ. ४.३५ मध्ये, ∠ दनफ हा ∠ दनध शी रेषीय जोडी करतो. म्हणून ∠ दनफ हा △दधन चा एक बाह्यकोन आहे. ∠धदन व ∠ दधन हे या बाह्यकोनाशी संलग्न नसणारे आंतरकोन आहेत.

m ∠ दनफ > m ∠ धदन आणि m ∠ दनफ > m ∠ दधन.

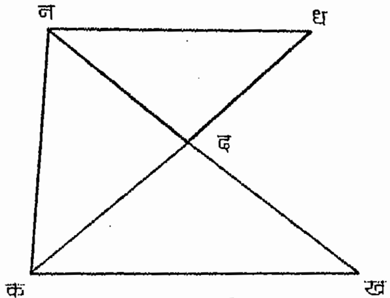
स्वाध्याय

१. आ. ४.३६ मध्ये दाखवलेल्या त्रिकोणाच्या भुजांची नावे व कोनांची नावे लिहा.



आ. ४.३६

२. आ. ४.३७ च्या संदर्भात खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.



आ. ४.३७

(१) △कदख च्या भुजांची नावे लिहा.

(२) △नदध च्या कोनांची नावे लिहा.

(३) △कनख व △कखध यांस सामाईक असणाऱ्या भुजेचे नाव लिहा.

(४) ∠ कनख हा कोणकोणत्या त्रिकोणांचा कोन आहे?

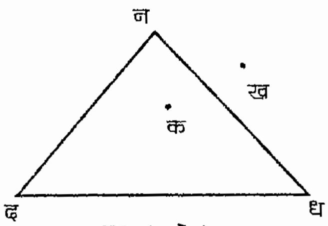
(५) ज्यांस केवळ एक शिरोबिंदू सामाईक आहे, कोन अथवा भुजा सामाईक नाहीत, अशा दोन त्रिकोणांची नावे लिहा.

(६) △कनध मध्ये क ची संमुखभुजा कोणती?

(७) △कनख मध्ये रेख कन या भुजेचा संमुख शिरोबिंदू कोणता?

(८) ज्या त्रिकोणात रेख कख या भुजेचा संमुख शिरोबिंदू द आहे, त्या त्रिकोणाचे नाव लिहा.

३.

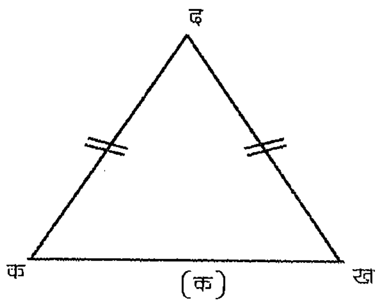


आ. ४.३८

आ. ४.३८ मध्ये, क हा △दधन च्या आंतरभागातील एक बिंदू आहे व बिंदू ख हा त्या त्रिकोणाच्या बहिर्भागात आहे. तर, रेषा कख, △दधन च्या जास्तीत जास्त किती भुजांना छेदू शकेल? ती रेषा, कोणत्या भुजेस छेदू शकणार नाही.

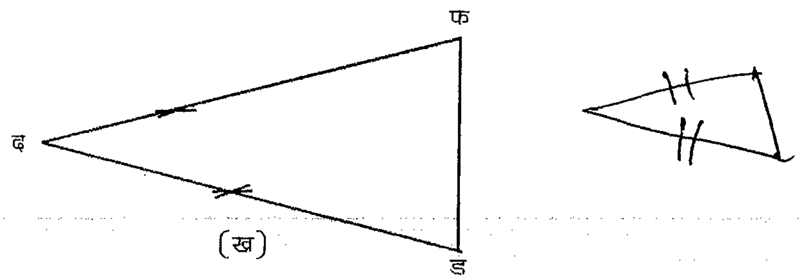
४. आ. ४.३९ मध्ये दाखवलेल्या समद्विभुज त्रिकोणांबाबत, पुढील प्रश्नांची उत्तरे दया.

(क) △दकख चे कोणते कोन एकरूप आहेत?



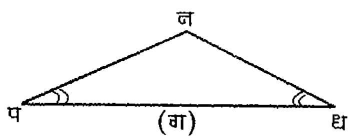
आ. ४.३९ (क)

(ख) △दडफ चे कोणते कोन एकरूप आहेत?



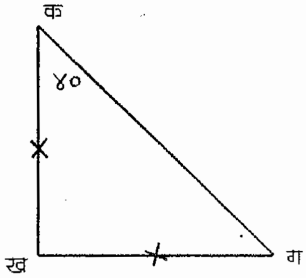
आ. ४.३९ (ख)

(ग) △नपध च्या कोणत्या भुजा एकरूप आहेत?



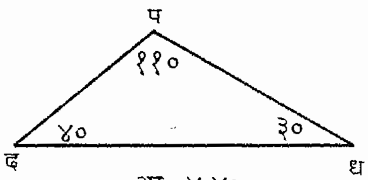
आ. ४.३९ (ग)

(घ) त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज १८० असते. △कखग मध्ये, ∠ख चे माप सांगा.



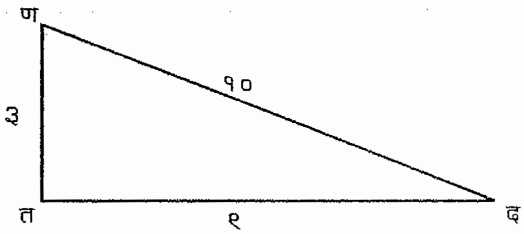
आ. ४.३९ (घ)

५. आ. ४.४० मध्ये, सर्वांत मोठ्या भुजेचे नाव लिहा.



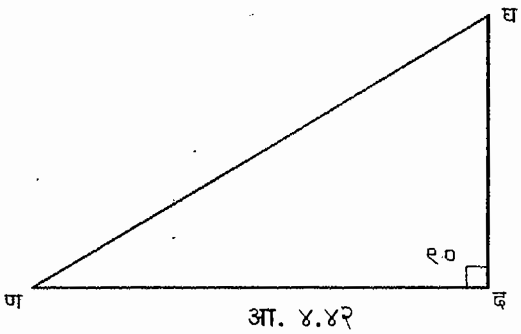
आ. ४.४०

६. आ. ४.४१ मध्ये, सर्वांत मोठ्या कोनाचे नाव लिहा.



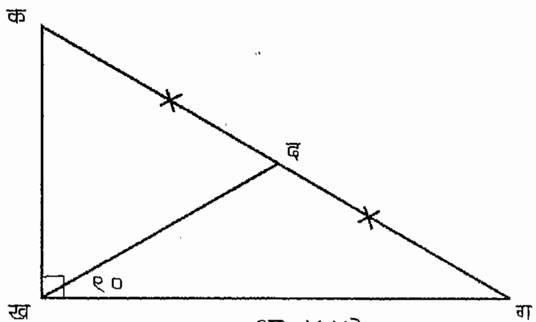
आ. ४.४१

७. आ. ४.४२ मध्ये, सर्वांत मोठ्या भुजेचे नाव लिहा.



आ. ४.४२

८. आ. ४.४३ मध्ये, m ∠ कखग =९०, द हा, कर्ण क ख चा मध्यबिंदू आहे.



आ. ४.४३

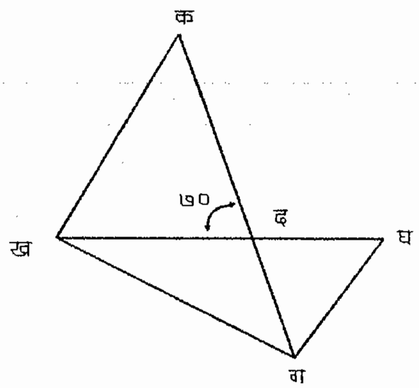
d(ख,द)= १०. तर कर्णाची लांबी किती?

९. पुढील वर्णनाशी सुसंगत आकृती काढून पाहा व विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे दया.

(१) △कखग मध्ये, m ∠ क=१००. रेख खद हा शिरोलंब आहे. तर द, क, ग ह्या बिंदूंची दरम्यानता लिहा.

△कखग मध्ये, m ∠ख=६०, m ∠ग=४०, रेख धफ हा शिरोलंब आहे. तर द,न,फ ह्या बिंदूंची दरम्यानता लिहा.

१०. आ. ४.४४ शी संबंधित पुढील प्रश्नांची उत्तरे दया.



आ. ४.४४

(१) △कदख च्या एका बाह्य कोनाचे नाव लिहा.

(२) △खदग च्या एका बाह्यकोनाचे नाव लिहा.

(3) ∠ खदग हा कोणत्या त्रिकोणांचा बाह्यकोन आहे?

(४) m ∠कदख =७० असेल तर कोणत्या कोनांची मापे ७० पेक्षा लहान असतील?

प्रकरण ५
त्रिकोणांची एकरूपता

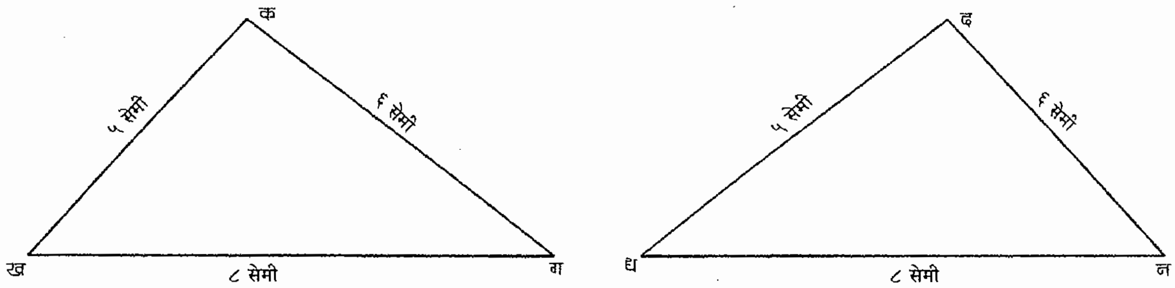
§ ५.१ एका जाड कागदावर △कखग आणि △दधन असे काढा की,

△कखग मध्ये △दधन मध्ये

(कख) = ५ सेमी. (धन) = ८ सेमी.

(खग) = ८ सेमी. (दध) = ५ सेमी.

(गक) = ६ सेमी. (नद) = ६ सेमी.



आ. ५.१

दोन्ही त्रिकोण काळजीपूर्वक कापून एकमेकांवर अशा रीतीने ठेवा की, ते एकमेकांशी तंतोतंत जुळतील. △कखग चे कोणते शिरोबिंदू △दधन च्या कोणत्या शिरोबिंदूशी जुळले असता हे दोन त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात?

आता या त्रिकोणांचे शिरोबिंदू शक्य तितक्या इतर सर्व पद्धतींनी जुळवून पाहा. त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात का?

आता या त्रिकोणांचे शिरोबिंदू शक्य तितक्या इतर सर्व पद्धतींनी जुळवून पाहा. त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात का?

△कखग व △दधन एकमेकांवर अशा रीतीने ठेवले की, बिंदू क हा द बिंदूशी, बिंदू ख हा ध बिंदूशी आणि बिंदू ग हा न बिंदूशी जुळेल तरच हे त्रिकोण एकमेकांशी जुळत नाहीत हे आपल्या लक्षात येते.

या दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमध्ये एक विशिष्ट एकास-एक संगती (one-one correspondence) लावली तरच हे त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात. दोन त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळले असता ते एकरूप (congruent) आहेत असे आपण म्हणतो.

△कखग आणि △दधन यांच्या शिरोबिंदूंमध्ये एकूण सहा एकास-एक संगती संभवतात. बिंदू क आणि बिंदू द यांच्यातील संगती क----द ने दाखवतात. एकूण सहा एकास-एक
संगतीपैकी दोन एकास-एक संगती खालील चिन्हांच्या साहाय्याने दाखवल्या आहेत.

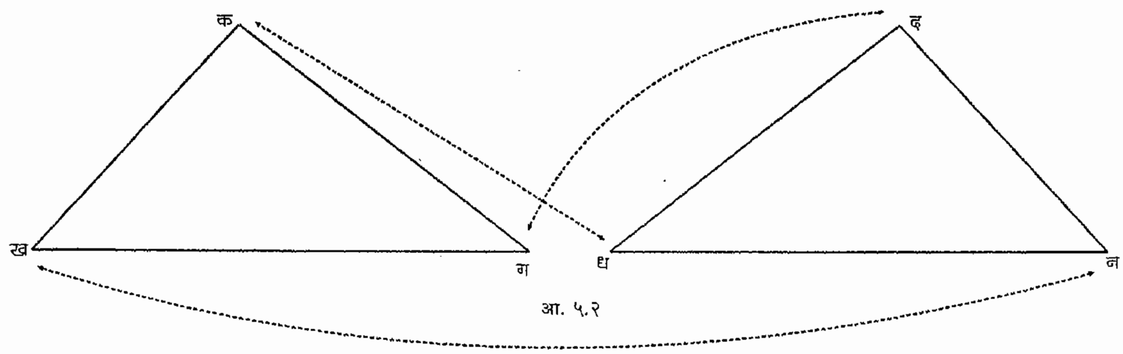
(१) क---द (२) क---द

ख---ध ख---न

ग---न ग---ध

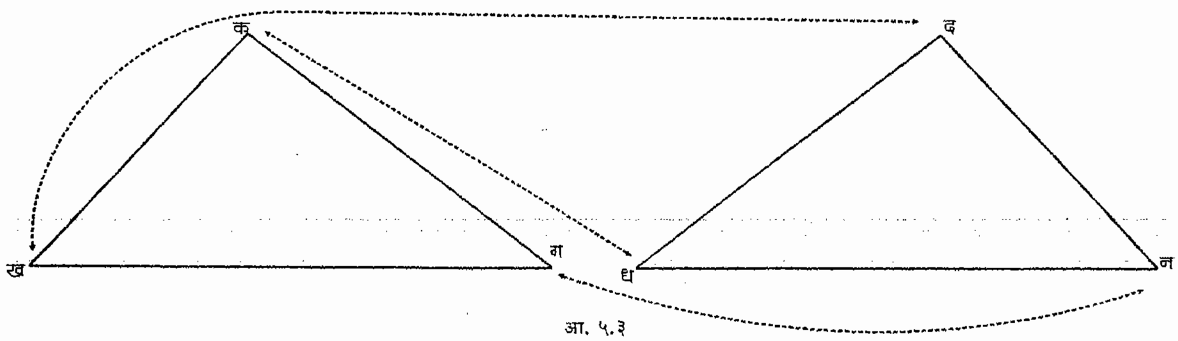
आणखी दोन एकास-एक संगती खालील आकृतींच्या साहाय्याने दाखवल्या आहेत.

(३)



आ. ५.२

(४)



आ. ५.३

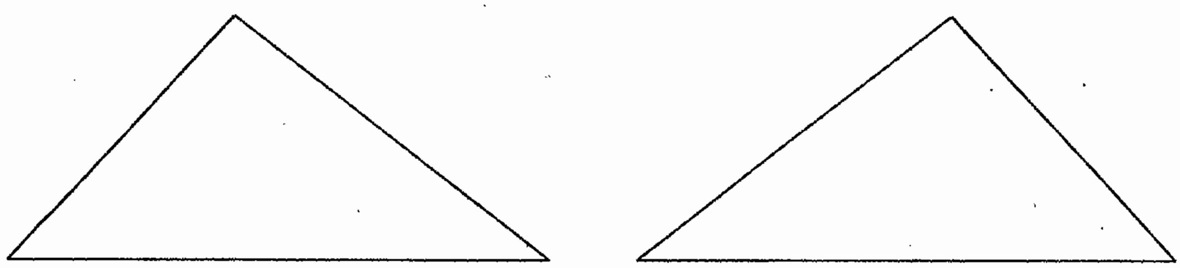
आता उरलेल्या दोन एकास-एक संगतींपैकी एक दाखविण्यासाठी खालील रिकाम्या जागा भरा.

(५) क---न

--- ---द

ग--- ---

ठरलेली एकास-एक संगती खालील आकृतीत दाखवा.



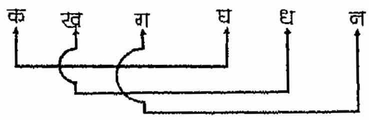
आ. ५.४

△कखग आणि △दधन यांच्या शिरोबिंदूंतील

क --- द

ख --- ध

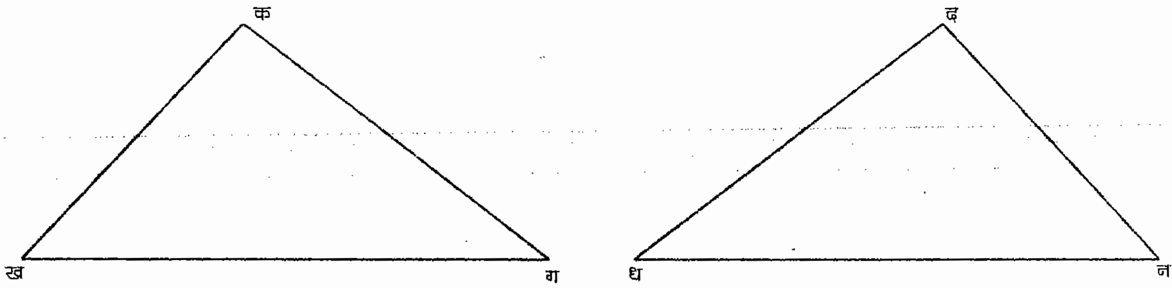
ग --- न



आ. ५.५

ही एकास एक संगती थोडक्यात कखग ---दधन अशी लिहितात. कखग - दधन अशी लिहितात. कखग - दधन असे जेव्हा आपण लिहितो तेव्हा क-द, ख-ध आणि ग-न असाच अर्थ होत असल्यामुळे कखग - दधन या चिन्हात क,ख,ग तसेच द,ध,न यांच्या क्रमाला फार महत्त्व
आहे. त्यांचा क्रम बदलला तर अर्थ बदलतो हे लक्षात असावे.

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील एकास-एक संगतीमुळे त्या त्रिकोणांच्या बाजूंमधील तसेच कोनांमधील एकास-एक संगती मिळते.



आ. ५.६

कखग - दधन म्हणजे क-द, ख-ध आणि ग-न हे आपल्या लक्षात आलेच आहे. या स्थितीत △कखग च्या शिरोबिंदू क समोरील बाजू धन आणि △दधन मधील संगत (corresponding) शिरोबिंदू द समोरील बाजू धन यांना संगत बाजू म्हणतात. तसेच बाजू गक व बाजू नद आणि बाजू गक व बाजू नद आणि बाजू कख व बाजू दध या संगत बाजू होत.

क-द म्हणून ∠क व ∠द हे संगत कोन होत, तसेच ∠ख व ∠ध आणि ∠ग व ∠न हे संगत कोन होत.

कखग - दधन या एकास एक संगतीमुळे △कखग आणि △दधन च्या बाजू आणि कोनांमध्ये जी एकास एक संगती साधली जाते ती खाली दिली आहे.

(१) बाजू खग-बाजू धन	∠खकग -∠धदन
बाजू गक-बाजू नद	∠कखग -∠दधन
बाजू कख-बाजू दध	∠खगक -∠धनद

△कखग आणि △दधन यांच्या शिरोबिंदूंतील आणखी एका एकास-एक संगतीमुळे या त्रिकोणांच्या बाजूमध्ये व कोनांमध्ये कोणती एकास-एक संगती साधली जाते हे खाली दिले आहे.

(२) जर कखग -- दधन

बाजू खग-बाजू नध	∠खकग -∠नदध

बाजू गक-बाजू धद ∠कखग -∠दनध

बाजू कख-बाजू दन ∠खगक -∠नधद

आता रिकाम्या जागा योग्य चिन्हे व अक्षरांनी भरून खालील विधाने पूर्ण करा.

△कखग व △दधन दिले असता

(३) जर कखग -- धनद

तर बाजू खग-बाजू नद ∠ खकग -∠ नधद

बाजू गक-....... .... - ∠ धनद

बाजू कख-....... ∠ खगक -.......

(४) जर कखग -- धनद

तर बाजू खग-....... ∠ खगक -.......

.... - बाजू धन .... - ∠ नदध

बाजू गक - ....-∠ दनध

(५) जर कखग -- नदध

तर बाजू खग-....... ∠ खगक -.......

.... - बाजू धन .... - ∠ नदध

.......-बाजू नद ∠ खगक - ....

(६) जर कखग -- नधद

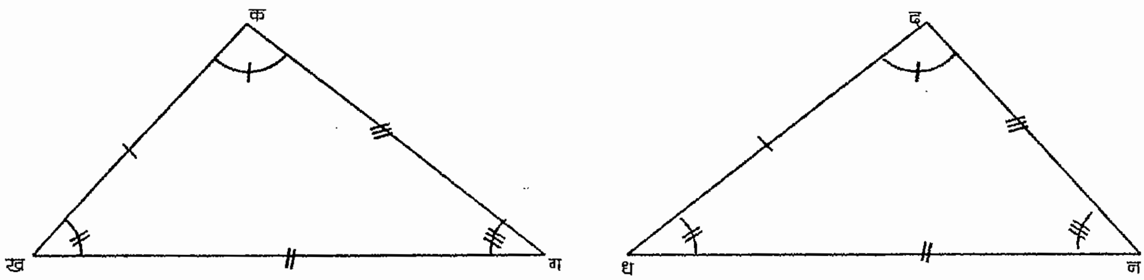
तर ....- बाजू धद ∠ खगक -.......

.... - बाजू धन .... - ∠ नधद

बाजू कख - .... -∠ धदन

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमध्ये एकास-एक संगती दिली असता त्या त्रिकोणांमध्ये संगत बाजू तसेच संगत कोन म्हणजे काय हे आता तुमच्या चांगले लक्षात आले असेल.

तुम्ही सुरुवातीला कापलेले △कखग व △दधन हे कागदाचे त्रिकोणी तुकडे घ्या. या त्रिकोणांना कखग - दधन या एकास एक संगतीनुसार एकमेकांवर ठेवा.



आ. ५.७

या त्रिकोणांच्या संगत बाजू तसेच संगत कोन यांच्या एकरूपतेविषयी काय आढळते?

कर्कटकाच्या साहाय्याने संगत बाजूंची लांबी मोजून पहा. कोनमापकाच्या साहाय्याने संगत कोनांची मापे घ्या. संगत बाजूंची लांबी समान असल्याचे तसेच संगत कोनांची मापे सारखी असल्याचे आढळेल. यावरून संगत बाजू व संगत कोन यांच्या एकरूपतेविषयी काय निष्कर्ष निघतो?

संगत बाजू तसेच संगत कोन एकरूप आहेत. आकृतीत संगत बाजू तसेच संगत कोन एकरूप असल्याचे सारख्या

चिन्हांनी दाखवले आहे.

आता आपल्याला दोन त्रिकोणांतील एकरूपता म्हणजे काय हे सांगता येईल.

दोन त्रिकोणांतील शिरोबिंदूंमध्ये एकास-एक संगती अशी असेल की संगत बाजूंची प्रत्येक जोडी एकरूप असेल आणि संगत कोनांची प्रत्येक जोडी एकरूप असेल तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.

जर त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील एखादी एकास-एक संगती एकरूपता असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप (congruent) आहेत असे आपण म्हणू.

△कखग व △दधन मध्ये कखग -दधन ही एकास-एक संगती एकरूपता असेल तर △कखग ≅ △दधन असे लिहितात व या त्रिकोणांना एकरूप त्रिकोण म्हणतात.

△कखग ≅ △दधन यावरून आपणाला खालील गोष्टी कळतात.

(१) बाजू खग ≅ बाजू धन	म्हणजेच	l(खग) = l(धन)
(२) बाजू गक ≅ बाजू नद	"	l(गक) = l(नद)
(३) बाजू कख ≅ बाजू दध	"	l(कख) = l(दध)
∠क ≅ ∠द	"	m∠क = ∠द
∠ख ≅ ∠ध	"	m∠ख = ∠ध
∠ग ≅ ∠न	"	m∠क = ∠न

△ढणत ≅ △यरल तर ढणत ---- यरल ही एकास एक संगती एकरूपता आहे. या स्थितीत △ढणत च्या कोणत्या बाजू व कोन △यरल च्या कोणत्या बाजूंशी व कोनांशी एकरूप असतील?

५.२ त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म :

(१)△कखग ≅ △दधन असेल तर कखग --दधन ही एकास एक संगती एकरूपता असते हे आपण पाहिले. आता कोणताही एक △कखग घेऊन त्याचे शिरोबिंदू क,ख व ग यांची त्याच शिरोबिंदूंशी म्हणजेच क,ख व ग शी एकास-एक संगती साधली तर △कखग हा स्वतःशी एकरूप होईल का? होईल याचा अर्थ असा की,

कोणताही त्रिकोण स्वतःशी एकरूप असतो.

△कखग ≅ △कखग

(२) समजा △कखग हा △दधन शी एकरूप आहे; तर △दधन हा △कखग शी एकरूप होईल का? होईल. कारण क व ख, ख व ध, ग व न या शिरोबिंदूमध्ये परस्पर एकास-एक संगती आहे व हे दोन त्रिकोण परस्परांशी तंतोतंत जुळतात.

एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असेल तर दुसरा त्रिकोण पहिल्या त्रिकोणाशी एकरूप असतो.

जर △कखग ≅ △दधन तर △दधन ≅ △कखग

(३) △कखग आणि △दधन हे दोन एकरूप त्रिकोण काढा. आता तिसरा △ढणत हा △दधन यांच्याशी एकरूप काढा. △कखग हा △ढणत शी एकरूप आहे का हे पडताळून पाहा.

एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणाशी आणि दुसरा त्रिकोण तिसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असेल तर पहिला त्रिकोण हा तिसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असतो.

जर △कखग ≅ △दधन आणि △दधन ≅ △ढणत तर △कखग ≅ △ढणत.

५.३ प्रश्न :

१. △कखघ आणि △ढणत मध्ये पुढील संगती दिली आहे. कखघ --ढणत, तर खालील रिकाम्या जागा भरा.

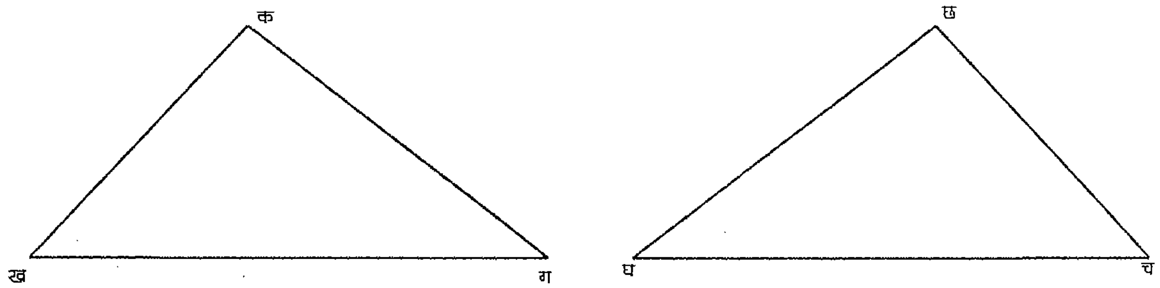
क -- ......

.... -- ढ

घ -- ....

२. घ--य, च--र, छ--ल हे थोडक्यात लिहून दाखवा.

३. कखग -- घचछ ही एकास एक संगती खालील आकृतीमध्ये दाखवा.



आ. ५.८

४. △दधन ≅ △ढणत, तर या त्रिकोणांतील एकरूप बाजू व कोनांच्या जोड्या सांगा.

५. △कखग ≅ △ढफन, तर खालील रिकाम्या जागा भरा.

बाजू खग ≅	∠क ≅ ......
बाजू गक ≅	≅ ......∠फ
≅ ......बाजू ढफ	∠ग ≅ ......

६. △यरल ≅ △घचछ, तर खालील रिकाम्या जागा भरा.

l(रल) = ...	m∠र =......
= ......l(घच)	...... = m∠घ
l(लय) = ...	...... = m∠छ.

७.△कखग असा काढा की l(कख)=l(कग). बाजू खग चा मध्यबिंदू घ घ्या. बिंदू क व बिंदू घ जोडा. △कखघ आणि △कघग एकरूप असतील का? या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील कोणती एकास-एक संगती एकरूपता आहे?

८. △घचछ हा एक समभुज त्रिकोण काढा. बाजू घग, बाजू चछ आणि बाजू छघ चे मध्यबिंदू अनुक्रमे ढ,ण आणि त घ्या. ढण, णत आणि तढ सांधा. तयार झालेले चार त्रिकोण परस्पर एकरूप असल्याचा पडताळा घ्या.

९. △ढणत हा कोणताही एक त्रिकोण घ्या. बाजू ढण, बाजू णत आणि बाजू ढत यांचे मध्यबिंदू अनुक्रमे क,ख आणि ग घ्या. कख, खग, गक सांधा. आता किती एकरूप त्रिकोण होतात हे पडताळून पाहा.

१०. रिकाम्या जागा भरा :

(क) दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमध्ये एकास-एक संगती जर अशी असेल की संगत बाजूंची प्रत्येक जोडी.... असेल आणि....प्रत्येक जोडी....असेल तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.

(ख) जर △घचछ ≅ △दधन, तर △दधन ≅ ......

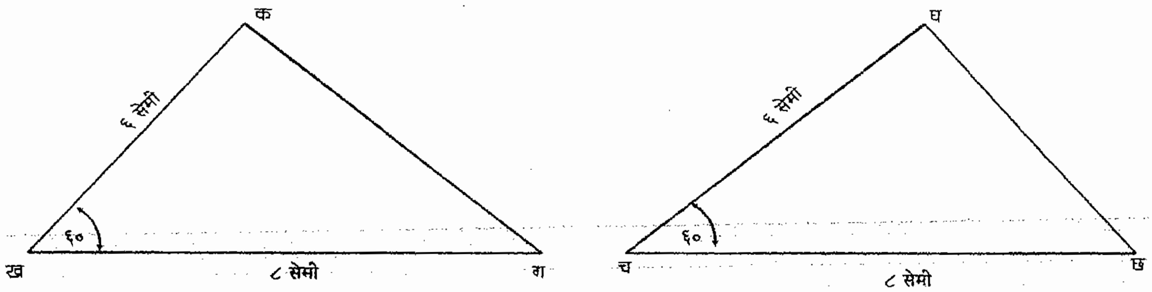
(ग) जर △ढणत ≅ △कखग आणि △कखग ≅ △यरल तर ...... ≅ △यरल.

५.४ त्रिकोणांच्या एकरूपतेसंबंधीच्या अटी :

तिन बाजू व तीन कोन असे त्रिकोणाचे एकूण सहा घटक असतात. एका त्रिकोणाचे हे सहा घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत सहा घटकांशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण म्हणतो. पण दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे सांगता येण्यासाठी एका त्रिकोणाचे सर्व सहा घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या सर्व संगत सहा घटकांशी एकरूप आहेत हे माहीत असणे आवश्यक आहे का? नसेल तर, दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे सांगता येण्यासाठी एका त्रिकोणाचे किमान किती व कोणते घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप आहेत हे माहित असणे पुरेसे आहे? या मुद्दयांचा आता आपण विचार करू.

५.५ खाली दिलेल्या पक्षावरून △कखग व △घचछ काढा.

△कखग मध्ये,	△घचछ मध्ये,
l(कख) = ६ सेमी.	l(घच) = ६ सेमी.
m∠कखग = ६०	m∠घचछ = ६०
l(खग) = ८ सेमी.	l(चछ) = ८ सेमी.



आ. ५.१

हे दोन त्रिकोण काळजीपूर्वक कापा व ते एकमेकांवर ठेवून पाहा. त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात का? त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील कोणती एकास-एक संगती साधली असता हे दोन त्रिकोण तंतोतंत जुळतात?

क--घ

ख--च किंवा कखग -- घचछ

ग--छ

ही शिरोबिंदूंतील एकास-एक संगती साधली असता दिलेले दोन त्रिकोण तंतोतंत जुळतात असे आढळेल.

△कखग व △घचछ हे कखग--घचछ ही एकास-एक संगती साधली असता तंतोतंत जुळतात याचा अर्थ हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. △कखग चे कोणते घटक घचछ च्या कोणत्या घटकांशी एकरूप आहेत, हे आपणास दिले होते?

l(कख) = ६ सेमी. व l(घच) = ६ सेमी.

∴बाजू कख ≅ बाजू घच.

m∠कखग = ६० व m∠घचछ = ६०

∴∠कखग ≅ घचछ.

l(खग) = l(चछ) = ८ सेमी.

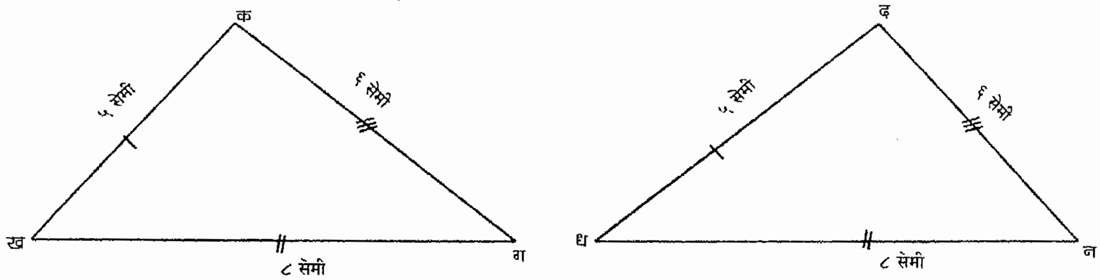
∴बाजू खग ≅ बाजू चछ.

∠कखग हा बाजू कख व बाजू खग यांतील समाविष्ट कोन आहे असे म्हणतात. तसेच ∠घचछ हा बाजू घच व बाजू चछ यांतील समाविष्ट कोन आहे. यावरून आपणांस दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेविषयीची खालील अट लक्षात येते.

दोन त्रिकोणांमध्ये एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांच्यामधील समाविष्ट कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजूंशी आणि त्यांच्यामधील समाविष्ट कोनाशी अनुक्रमे एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेची ही अट आपण बाजू-कोन-बाजू (Side-Angle-Side) थोडक्यात बा को बा (SAS) अशी लक्षात ठेवू.

५.६ या प्रकरणाच्या सुरुवातीला घेतलेले △कखग व △दधन हे दोन त्रिकोण कखग---दधन ही एकास-एक संगती साधली असता एकरूप आहेत असे आपण पाहिले.



आ. ५.१०

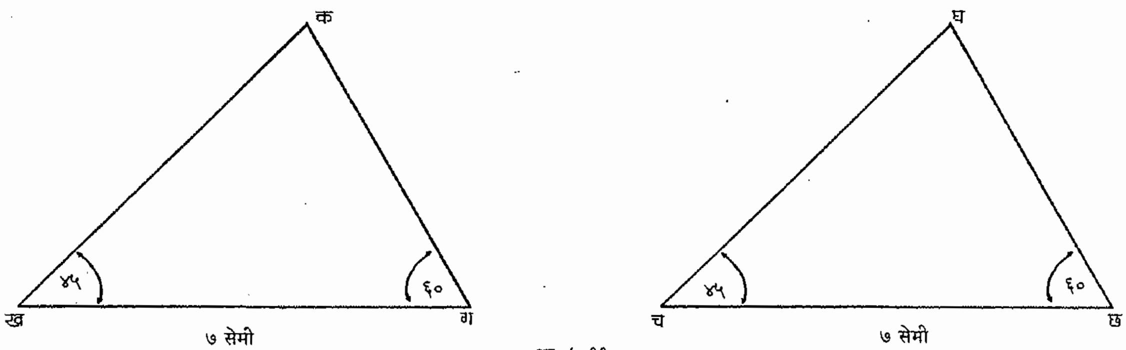
या दोन त्रिकोणांत कोणते घटक एकरूप असल्याचे आपणास दिले आहे? यावरून आपण दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेविषयी कोणती अट सांगू शकतो?

दोन त्रिकोणांमध्ये एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी अनुक्रमे एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेची ही अट बाजू-बाजू-बाजू (Side-Side-Side) किंवा थोडक्यात बा बा बा (sss) अशी लक्षात ठेवू.

५.७ △कखग व △घचछ असे काढा की

△कखग मध्ये,	△घचछ मध्ये,
m∠कखग = ४५	m∠घचछ = ४५
l(खग) = ७ सेमी.	l(चछ) = ७ सेमी.
m∠खगक = ६०	m∠चछघ = ६०



आ. ५.११

हे दोन त्रिकोण काळजीपूर्वक कापून एकमेकांवर ठेवून पाहा. त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूतील कोणती एकास-एक-

संगती एकरूपता आहे?

क--घ

ख--च किंवा कखग---घचछ

ग--छ

ही एकास-एक संगती एकरूपता आहे.

येथ $\triangle$कखग चे कोणते घटक $\triangle$घचछ च्या कोणत्या घटकांशी एकरूप असल्याचे दिले आहे?

m$\angle$कखग = m$\angle$घचछ = ४५

$\therefore \angle$कखग $\cong \angle$घचछ

l(खग) = l(चछ) = ७ सेमी.

$\therefore$ बाजू खग $\cong$ बाजू चछ

m$\angle$खगक = m$\angle$चछघ =६०

$\therefore \angle$खगक $\cong \angle$चछघ.

बाजू कग ही $\angle$ख व $\angle$ग यांच्यामधील समाविष्ट बाजू आहे. तसेच बाजू चछ ही $\angle$च व $\angle$छ यांच्यामधील समाविष्ट बाजू आहे.

यावरून दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कोणती अट लक्षात येते?

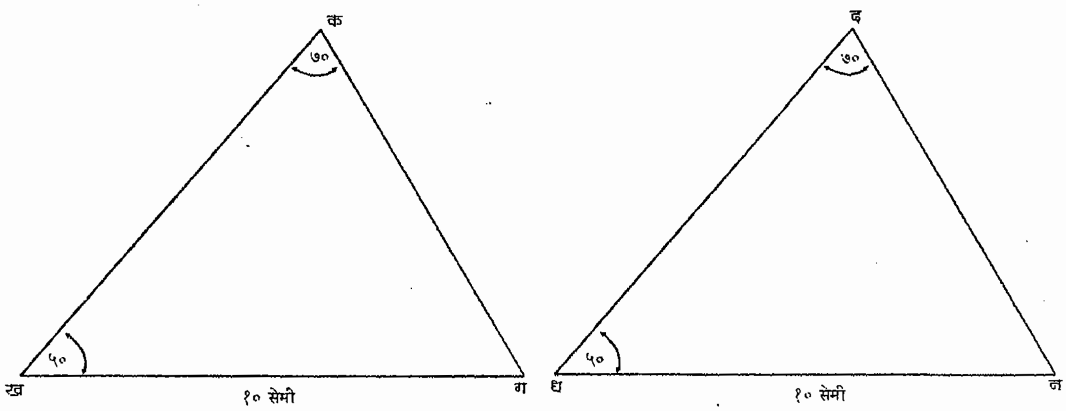
दोन त्रिकोणांमध्ये एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्यामधील समाविष्ट बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन व त्यांच्यामधील समाविष्ट बाजू यांच्याशी अनुक्रमे एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

अर्थात दोन त्रिकोणामध्ये कोन-बाजू-कोन (Angle-side-Angle); थोडक्यात को बा को (ASA) ही संगत एकरूपता असते.

५.८ दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेची आणखी एक अट आपण पाहू.

एका जाड कागदावर $\triangle$कखग $\triangle$दधन असे काढा की

$\triangle$कखग मध्ये,	$\triangle$दधन मध्ये,
l(खग) = १० सेमी.	l(धन) = १० सेमी.
m$\angle$कखग = ५०	m$\angle$दधन = ५०
m$\angle$खकग = ७०	m$\angle$धदन = ७०



आ. ५.१२

हे दोन त्रिकोण काळजीपूर्वक कापा व त्यांना एकमेकांवर ठेवून कखग---दधन ही एकास एक संगती एकरूपता आहे याची खात्री करून घ्या.
यावरून त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कोणती अट लक्षात येते?

दोन त्रिकोणांमध्ये एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्यामधील समाविष्ट बाजू दुसऱ्या त्रिकोणांचे दोन संगत कोन व त्यांच्यामधील समाविष्ट बाजू यांच्याशी अनुक्रमे एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

अर्थात दोन त्रिकोणामध्ये कोन-बाजू-कोन (Angle-Side-Angle); थोडक्यात को बा को (ASA) ही संगती एकरूपता असते.

मागील उदाहरणात
$m\angle$क = $m\angle$द
$m\angle$ख = $m\angle$ध
आणि l(खग) = l(धन) दिले आहे.
या स्थितीत कखग --- घचछ ही एकास-एक संगती एकरूपता आहे.
बाजू कग व बाजू धन या अनुक्रमे $\angle$क व $\angle$द या एकरूप कोनांसमोरील बाजू आहेत.
जर $m\angle$क = $m\angle$द, $m\angle$ख = $m\angle$ध आणि l(कग)=l(दन) दिले असेल तर $\triangle$कखग व $\triangle$दधन एकरूप होतील का? कारण सांगा.

५.९ दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर एका त्रिकोणाचे तीन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत कोनांशी एकरूप असतात हे आपण पाहिले. दोन त्रिकोणांमध्ये एका त्रिकोणाचे तीन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असणे जरूर आहे काय?

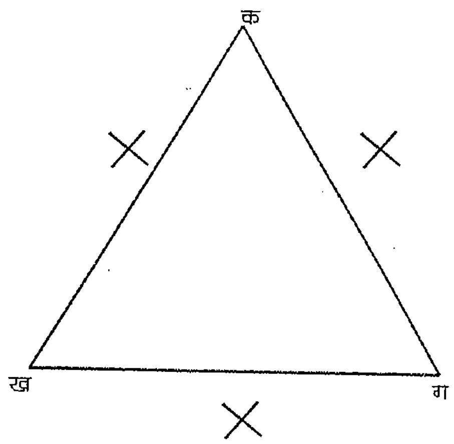
एका त्रिकोणाचे तीनही कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांशी अनुक्रमे एकरूप असतील तर हे दोन त्रिकोण समरूप किंवा सरूप (similar) त्रिकोण होत. सरूप त्रिकोण वेगवेगळ्या आकाराचे असल्यास ते एकरूप नसतात. वेगवेगळ्या आकाराचे सरूप त्रिकोण काढून याचा पडताळा घ्या. अर्थातच सरूप त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमध्ये एकास-एक संगती साधली तर ती एकरूपता असतेच असे नाही.

५.१० प्रश्न :

१. दोन त्रिकोणांमध्ये बा को बा ही संगती एकरूपता असते म्हणजे काय?
२. $\triangle$कखग व $\triangle$घचछ मध्ये कखग --- घचछ ही एकास-एक संगती एकरूपात आहे तर खालीलपैकी कोणती विधाने बरोबर व कोणती चूक आहेत?

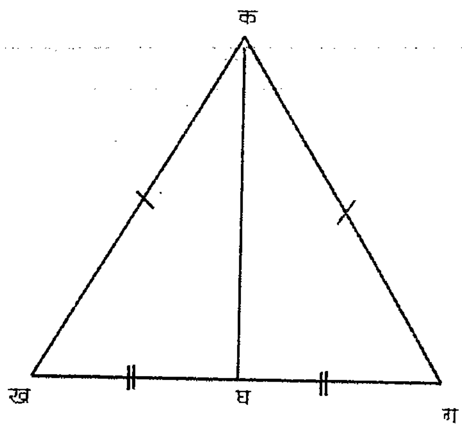
(क) बाजू खग $\cong$ बाजू चछ	(च) $m\angle$ख = $m\angle$घ
ख) बाजू कख $\cong$ बाजू घछ	(छ) l(कग) = l(घछ)
(ग) $m\angle$ग = $m\angle$छ	(ज) $\angle$क = $\angle$घ
(घ) $m\angle$ख = $m\angle$च	(झ) बाजू कख $\cong$ बाजू घच

३. आ. ५.१३ मध्ये कखग---खगक ही एकास-एक संगती एकरूपता आहे. अशा आणखी किती एकास-एक संगती एकरूपता असतील? त्या एकास एक संगती लिहा.



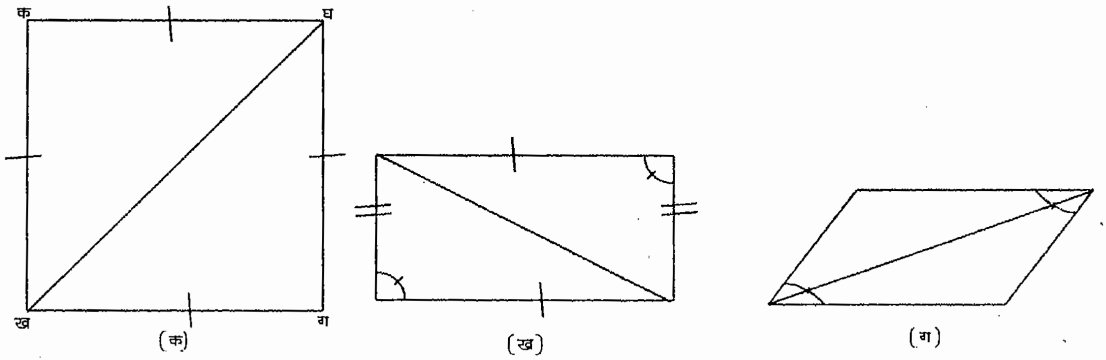
आ. ५.१३

४. आ. ५.१४ मध्ये △कखघ ≅ △कगघ हे त्रिकोण कोणत्या अटीनुसार एकरूप आहेत? या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील कोणती एकास-एक संगती एकरूपता आहे?



आ. ५.१४

५. खालील आ. ५.१५ मध्ये त्रिकोणांच्या एकरूप भागावर सारख्या खुणा केल्या आहेत. प्रत्येक आकृतीत कोणते त्रिकोण एकरूप आहेत? शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास-एक संगतीनुसार व कोणत्या अटींनुसार?



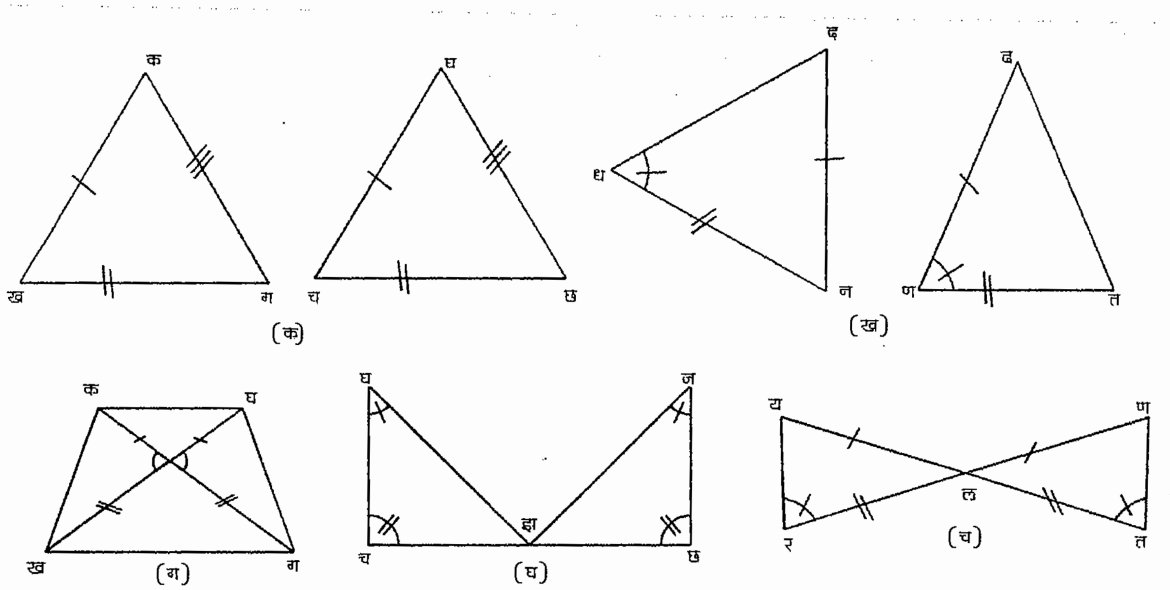
आ. ५.१५

६. खालील आकृतींत त्रिकोणांच्या एकरूप भागांवर सारख्या खुणा केल्या आहेत.

(क) कोणते त्रिकोण एकरूप आहेत?

(ख) एकरूप असलेले त्रिकोण कोणत्या अटीनुसार एकरूप आहेत?

(ग) कोणते त्रिकोण एकरूप नाहीत?



आ. ५.१६

७. △कखघ व △ढणंद मध्ये

बाजू खग ≅ बाजू ढण; बाजू गक ≅ बाजू णद व ∠क ≅ ∠ण तर

△कखघ व △ढणद मध्ये एकरूप आहेत का? कोणत्या अटीनुसार?

८. दोन काटकोन त्रिकोणांमध्ये एका त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू यांच्याशी अनुक्रमे एकरूप असतील तर ते काटकोन त्रिकोण एकरूप असतील का हे आकृती काढून, त्रिकोण कापून व ते एकमेकांवर ठेवून पाहा.

स्वाध्याय

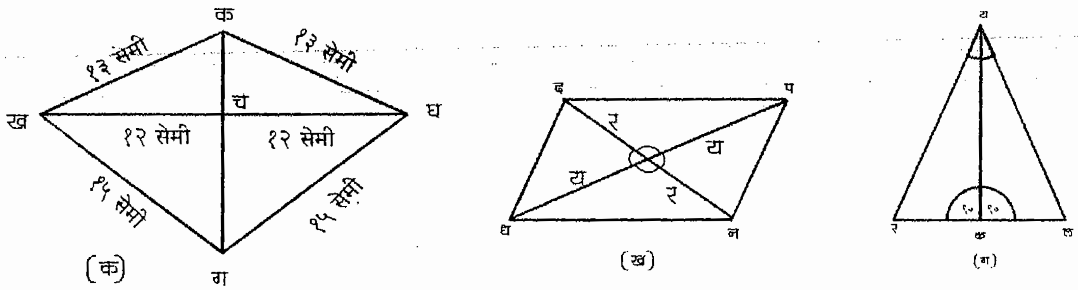
१. △दधन व △णतढ ही एकास-एक संगती एकरूपता आहे असे दिले असेल, तर △दधन च्या कोणत्या बाजू व कोन △ढणत च्या कोणत्या बाजू व कोनांशी एकरूप आहेत असे आपल्याला कळते?

२. △कखग व △दधन मध्ये बाजू कख ≅ बाजू धन, बाजू खग ≅ बाजू नद आणि बाजू गक ≅ बाजू दध; तर या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील कोणती एकास-एक संगती एकरूपता आहे?

३. दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे सांगता येण्यासाठी एका त्रिकोणाचे किमान किती घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप आहेत हे कळणे जरूर आहे?

त्रिकोणांच्या एकरूपतेविषयीच्या सर्व अटी सांगा.

४. खालील आकृतींमध्ये त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांची मापे दिली आहेत. कोणते त्रिकोण एकरूप आहेत? कोणत्या अटीनुसार?



आ. ५.१७

५. △कखग व △दधन मध्ये बाजू कख ≅ बाजू दध, बाजू खग ≅ बाजू धन आणि ∠ख ≅ ∠न. या माहितीवरून हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे सांगता येत नाही. का?

६. एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असेल आणि दुसरा त्रिकोण तिसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असेल तर पहिला त्रिकोण हा तिसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असतो हे प्रायोगिक पद्धतीने कसे दाखविता येईल?

प्रकरण ६
समांतर रेषा

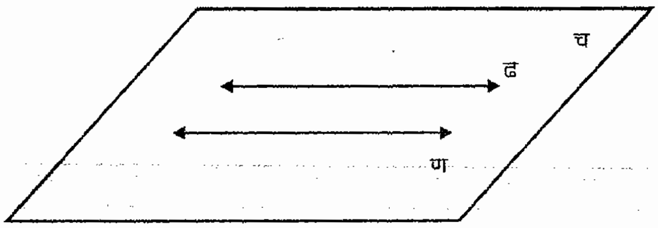
§ **६.१** प्रतलातील रेषांसंबंधी मागील एका प्रकरणात आपण दोन विधाने केली आहेत ती आठवा.

१. एकाच प्रतलात असलेल्या दोन रेषा परस्परांना छेदतात अथवा छेदत नाहीत.

२. एकाच प्रतलात असलेल्या दोन रेषा परस्परांना छेदत असतील तर त्या फक्त एकाच बिंदूत छेदतात.

यापूर्वीच्या प्रकरणात एकाच प्रतलात असलेल्या पण परस्परांना छेदणाऱ्या रेषांचा आपण विचार केला. या प्रकरणात एकाच प्रतलात असलेल्या पण परस्परांना न छेदणाऱ्या रेषांचा आपण विचार करणार आहोत. तारायंत्राच्या तारा, आगगाडीचे रूळ, तुमच्या वहीतील रेघा इत्यादी गोष्टी अशा प्रकारच्या रेषांची प्रतीके म्हणून सांगता येतील. एकाच प्रतलात असलेल्या पण एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांच्या अभ्यासातून अनेक भूमितीय आकृतींच्या मनोरंजक गुणधर्मांचा आपल्याला परिचय होईल. अशा प्रकारच्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

एकाच प्रतलात असलेल्या, परंतु परस्परांस न छेदणाऱ्या
रेषांना **समांतर रेषा** म्हणतात.



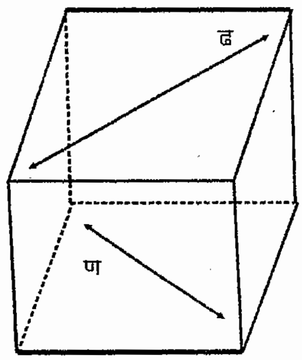
आ. ६.१

आकृती ६.१ मध्ये च प्रतलातील रेषा ढ व रेषा ण या समांतर रेषा दाखवल्या आहेत. आपल्या समांतर रेषांसंबंधी च्या माहितीनुसार दोन रेषा समांतर असण्यासाठी पुढील दोन अटींची पूर्तता त्या रेषांनी करावयास हवी.

१. त्या रेषा एकाच प्रतलात असाव्यात, आणि

२. त्या रेषा परस्परांना छेदणाऱ्या नसाव्यात.

या दोन अटींपैकी जर एक अट दिलेल्या दोन रेषांकडून पाळली गेली नाही तर त्या रेषा समांतर आहेत असे आपण म्हणणार नाही.

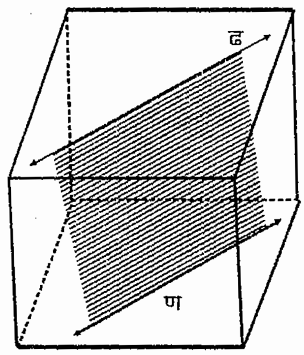


आ. ६.२

आकृती ६.२ मध्ये रेषा ढ व रेषा ण परस्परांना छेदत नाहीत. या रेषा समांतर आहेत असे आपण म्हणू का? अर्थातच नाही. कारण त्या रेषा जरी परस्परांना छेदत नसल्या तरी त्या वेगवेगळ्या प्रतलांत आहेत. इतकेच नव्हे तर त्या दोघींना सामावणारे एक प्रतल असत नाही. त्यामुळे समांतर रेषांसंबंधीच्या दोन अटींपैकी पहिली अट पाळली जात नाही; आणि म्हणून त्या रेषा समांतर आहेत असे आपण म्हणणार नाही.
अशा प्रकारच्या एका प्रतलात सामावल्या न जाणाऱ्या रेषांना, वितलीय रेषा (Skew Lines) म्हणतात.

ज्या रेषांना सामावणारे एकही प्रतल नसते
अशा रेषांना वितलीय रेषा म्हणतात.

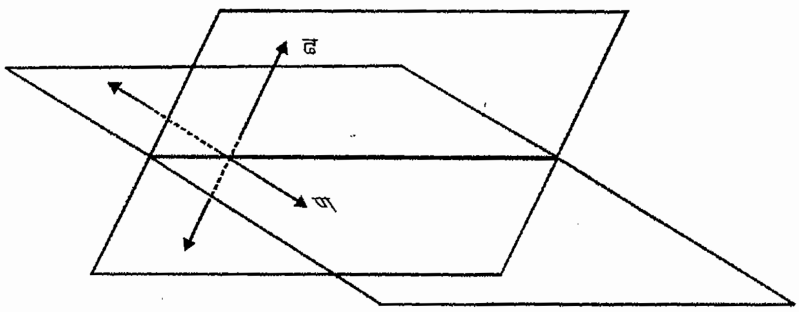
या संदर्भात आ. ६.२ मधील रेषा ढ व रेषा ण ह्या वितलीय रेषा आहेत असे म्हणता येईल.



आ. ६.३

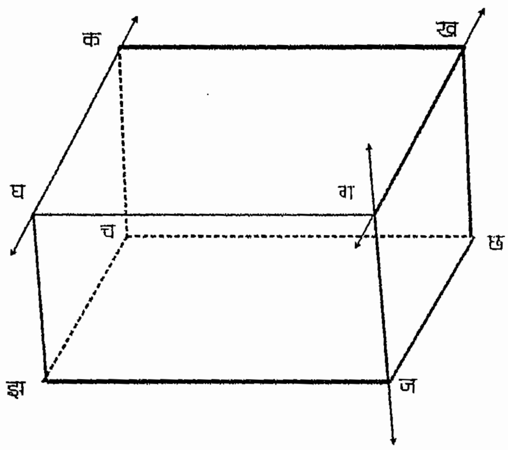
आ. ६.३ मध्ये थोडी वेगळी परिस्थिती दाखवली आहे. रेषा ढ व रेषा ण ह्या भिन्न प्रतलांत असून परस्परांना छेदत नाहीत. मग त्या वितलीय रेषा आहेत का? नाही. कारण जरी त्या भिन्न प्रतलात दिसत असल्या तरी त्यांना सामावणारे एक प्रतल आहे. म्हणून त्यांना वितलीय रेषा म्हणता येणार नाही. त्यांना समांतर रेषा म्हणता येईल का? होय. यावरून हे स्पष्ट होईल की, दोन रेषा वितलीय असण्यासाठी त्या भिन्न प्रतलांत असणे एवढेच पुरेसे नाही, तर त्या रेषांना सामावणारे एकही प्रतल नसणे ही बाब त्या रेषा वितलीय असण्यासाठी आवश्यक आहे. भिन्न प्रतलात असलेल्या पण परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषा वितलीय असू शकतील का?

आ. ६.४ मधील रेषा ढ व रेषा ण वितलीय आहेत का? तुमच्या उत्तराचे कारण सांगा.



आ. ६.४

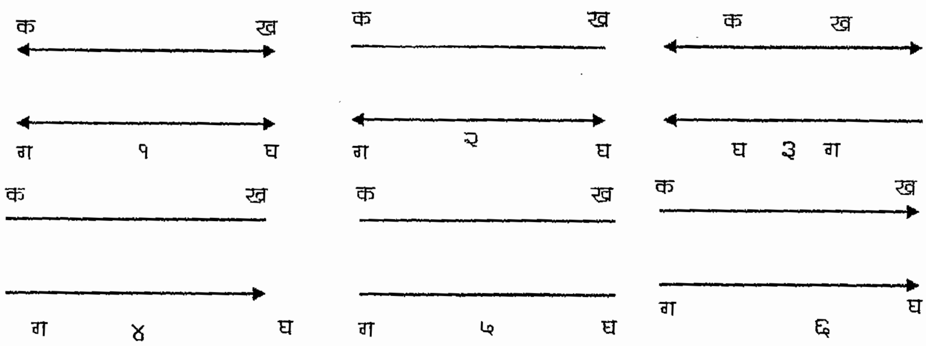
आ ६.५ मध्ये रेषा घक व रेषा गख या समांतर रेषा आहेत. याच आकृतीतील समांतर रेषांच्या व वितलीय रेषांच्या इतर जोड्या सांगा.



आ. ६.५

§ ६.२ समांतर रेषाखंड व किरण :

दोन रेषा समांतर आहेत असे केव्हा म्हणता येते हे आपण पाहिले. दोन रेषाखंड किंवा दोन किरण किंवा एक रेषाखंड व एक किरण समांतर आहेत असे आपण केव्हा म्हणू शकतो? खालील आकृतीत यासंबधीचे सहा प्रकार दाखवले आहेत.

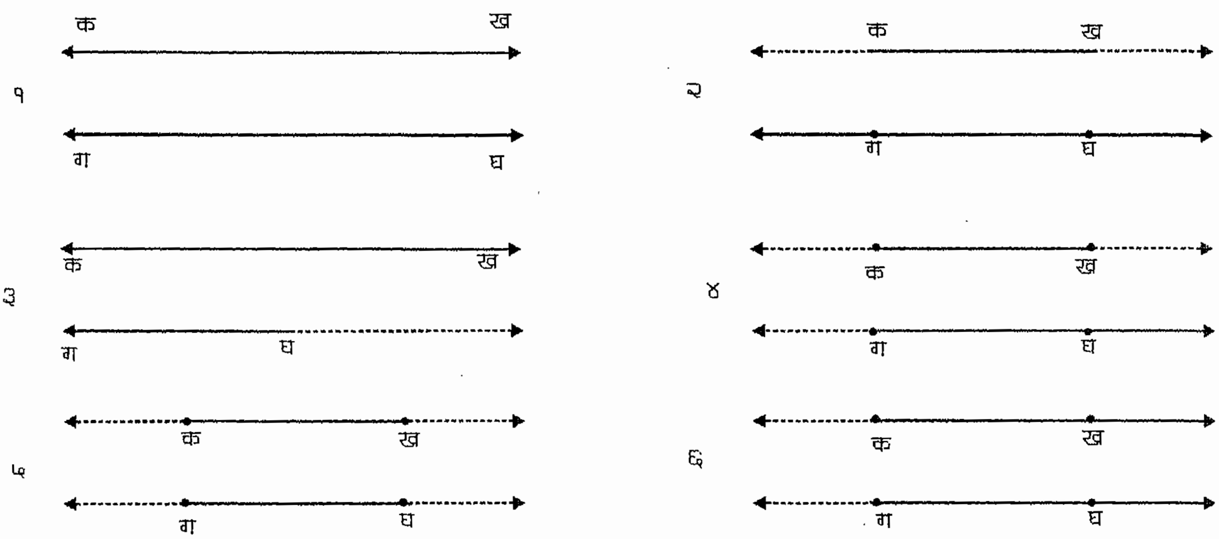


आ. ६.६

(१) रेषा कख समांतर रेषा गघ
(२) रेख कख समांतर रेषा गघ
(३) रेषा कख समांतर किरण गघ
(४) रेख कख समांतर किरण गघ
(५) रेख कख समांतर रेख गघ
(६) किरण कख समांतर किरण गघ

म्हणजेच जसे दोन रेषा समांतर आहेत असे आपण म्हणतो तसेच दोन रेषाखंड किंवा दोन किरण किंवा एक रेषाखंड व एक किरण समांतर आहेत असेही आपणास म्हणता येते. रेषाखंड, किरण किंवा खुद्द रेषा हे रेषेचे उपसंच आहेत हे आपल्याला माहीत आहे. मग रेषेचे हे उपसंच परस्परांना समांतर आहेत असे आपणांस केव्हा म्हणता येईल?

खालील आकृतीवरून या प्रश्नाचे उत्तर तुम्हांला सहत शोधता येईल.



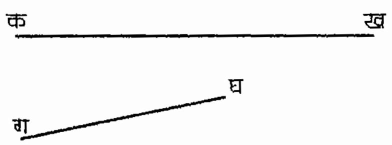
आ. ६.७

आ. ६.७ मध्ये किरण, रेषाखंड अथवा रेषा परस्परांना समांतर असतानाची परिस्थिती दाखवली आहे. उदा. (४) मध्ये रेषाखंड कख व किरण गघ समांतर आहेत, कारण त्यांना सामावणाऱ्या रेषा कख व रेषा गघ या समांतर आहेत. इतर आकृतींबद्दलही असेच सांगता येईल. यावरून खालील निष्कर्ष निघतो.

जर दोन रेषा समांतर असतील तर एक रेषा अथवा तिचा कोणताही भाग हा दुसऱ्या रेषेशी अथवा तिच्या कोणत्याही भागाशी समांतर आहे असे म्हणता येते.

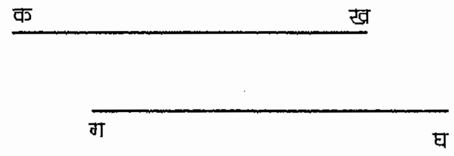
हेच दुसऱ्या शब्दांत असे सांगता येईल.

दोन रेषाखंड किंवा दोन किरण किंवा एक रेषाखंड व एक किरण यांना प्रत्येकी सामावणाऱ्या रेषा जर परस्परांशी समांतर असतील तर ते उपसंच परस्परांशी समांतर असतात.



आ. ६.८

आ. ६.८ मध्ये रेख कख व गघ हे एकाच प्रतलात आहेत व परस्परांना छेदत नाहीत. मग यांना समांतर रेषाखंड म्हणता येईल का? नाही. कारण हे रेषाखंड ज्या रेषांचे भाग आहेत त्या रेषा परस्परांना समांतर नाहीत व म्हणून हे दोन रेषाखंड समांतर नाहीत.



आ. ६.९

आता समजा रेख कख आणि गघ हे रेषाखंड समांतर आहेत असे आपणांस सांगितले, तर त्यांना सामावणाऱ्या रेषांसंबंधी आपणास काय सांगता येईल? या रेषा परस्परांना समांतर असतील.

जर दोन रेषांचे उपसंच समांतर असतील तर त्या रेषा समांतर असतात.

§ ६.३ प्रश्न :

१. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ते सांगा.

(१) जर दोन रेषा परस्परांना छेदत नसतील तर त्या रेषा समांतर असतात.

(२) जर रेषा ढ व रेषा ण या समांतर असतील तर त्या एकप्रतलीय असतात.

(३) जर दोन रेषा समांतर नसतील तर त्या एका प्रतलात असू शकत नाहीत.

(४) ज्या रेषा समांतर नसतात त्यांना वितलीय रेषा म्हणतात.

(५) ज्या रेषा समांतर नसतात त्या परस्परांना छेदतातच.

(६) ज्या रेषा एका प्रतलात असतात आणि परस्परांना छेदत नाहीत त्या रेषा समांतर असतात.

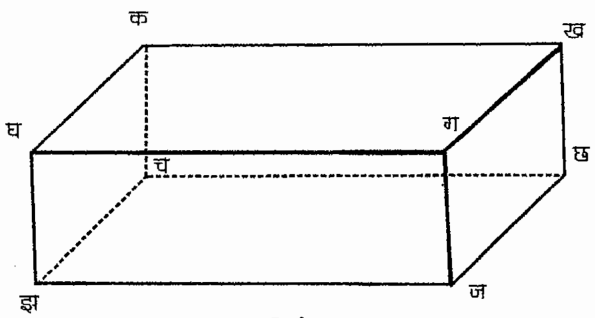
(७) ज्या रेषा समांतर नसतील त्या एका प्रतलात नसतात.

(८) वितलीय रेषा एका प्रतलात असू शकतात.

(९) जर किरण कख व किरण गघ समांतर असतील तर रेषा कख व रेषा गघ समांतर असल्याच पाहिजेत.

(१०) एका प्रतलातील दोन रेषा एक तर परस्परांना छेदतात किंवा समांतर असतात.

२. आ. ६.१० मध्ये



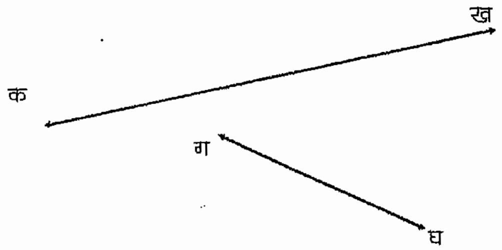
आ. ६.१०

(१) समांतर रेषाखंडांच्या जोड्या सांगा.

(२) वितलीय रेषांनी सामावलेल्या रेषाखंडांच्या जोड्या सांगा.

३. दोन रेषा समांतर असण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या अटी लिहा.

४. आ. ६.११ मध्ये रेख कख आणि किरण गघ एका प्रतलात आहेत आणि परस्परांस छेदत नाहीत.



आ. ६.११

(१) रेख कख व किरण गघ समांतर आहेत का?

(२) जर नसतील तर का नाहीत?

५. खालीलपैकी प्रत्येक प्रश्नाला चार पर्याय दिले आहेत. त्यांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

(१) कोणत्याही दोन एकप्रतलीय रेषा ....

(क) पस्परांना छेदतात अथवा समांतर असतात.

(ख) पस्परांना छेदतात आणि समांतर असतात.

(ग) परस्परांना नेहमीच छेदतात. (घ) नेहमीच समांतर असतात.

(२) जर दोन रेषा समांतर असतील तर ....

(क) त्या पस्परांना छेदतात. (ख) त्या पस्परांना छेदू शकतात.

(ग) त्या परस्परांना छेदत नाहीत. (घ) याशिवाय वेगळे उत्तर.

(३) एकाच प्रतलात असलेल्या दोन रेषा परस्परांना छेदत नसतील तर त्या ....

(क) समांतर नसतात. (ख) समांतर असतात.

(ग) वितलीय असतात. (घ) याशिवाय वेगळे उत्तर.

(४) दोन वितलीय रेषा ......

(क) एका प्रतलात असतात. (ख) एका प्रतलात असू शकतात.

(ग) दोन भिन्न प्रतलांत असतात. (घ) याशिवाय वेगळे उत्तर.

(४) दोन वितलीय रेषा ......

(क) एका प्रतलात असतात. (ख) एका प्रतलात असू शकतात.

(ग) दोन भिन्न प्रतलांत असतात. (घ) याशिवाय वेगळे उत्तर.

(४) दोन वितलीय रेषा ......

(क) एका प्रतलात असतात. (ख) एका प्रतलात असू शकतात.

(ग) दोन भिन्न प्रतलांत असतात. (घ) याशिवाय वेगळे उत्तर.

(५) जर दोन किरण समांतर असतील तर ....

(क) ते परस्परांना छेदत नाहीत. (ख) ते एका प्रतलात आहेत व परस्परांना छेदत नाहीत.

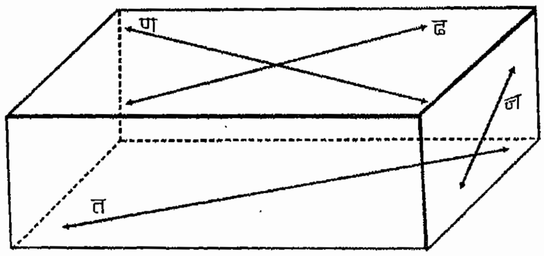
(ग) त्यांना सामावणाऱ्या रेषा एकाच प्रतलात आहेत व त्या परस्परांना छेदत नाहीत. (घ) याशिवाय वेगळे उत्तर.

६. खालील विधानांतील रिकाम्या जागी योग्य शब्द अथवा शब्दसमुह लिहून ती विधाने पूर्ण करा.

(१) ज्या रेषा एकप्रतलीय आहेत आणि परस्परांना छेदत नाहीत अशा रेषांना.......रेषा म्हणतात.

(२) ज्या दोन रेषांमधून जाणारे एक प्रतल असू शकत नाही अशा रेषांना.......रेषा म्हणतात.

(३) दोन किरण समांतर आहेत असे आपण तेव्हाच म्हणू शकतो की जेव्हा.........
(४) जर रेषा कख व रेषा गघ समांतर असतील तर रेख कख व रेख गघ......

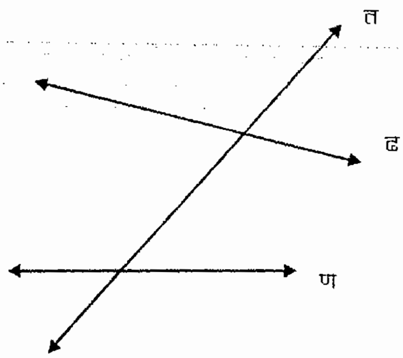


आ. ६.१२

७. आ. ६.१२ मध्ये ढ व रेषा ण एकाच प्रतलात असून रेषा न व त वेगवेगळ्या प्रतलात आहेत, तर रेषा ढ,ण,न व त यांच्यापैकी

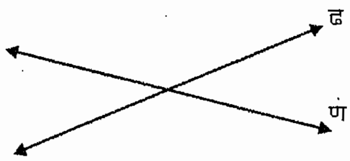
(१) समांतर रेषांची जोडी सांगा.
(२) परस्परांना छेदणाऱ्या रेषांच्या जोड्या सांगा.
(३) वितलीय रेषांच्या जोड्या सांगा.

§ **६.४** आता आपण काही संज्ञांचा परिचय करून घेऊ.



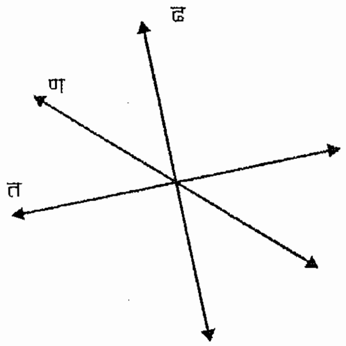
आ. ६.१३

छेदिका : तुमच्या वहीत कोणत्याही दोन रेषा काढा. त्यांना रेषा ढ व ण अशी नावे द्या. या दोन रेषांना दोन भिन्न बिंदूत छेदणारी तिसरी रेषा त काढा. तुमची आकृती बाजूच्या आकृतीप्रमाणे आली असेल (आ.६.१३). रेषा त ला रेषा ढ व ण यांची छेदिका म्हणतात.



आ. ६.१४

आ. ६.१४ मध्ये रेषा ढ ला छेदिका म्हणता येणार नाही. कारण ती रेषा, रेषा ण या एकाच रेषेला छेदते. त्यामुळे ती रेषा ण ला छेदणारी रेषा होईल, पण छेदिका होणार नाही.



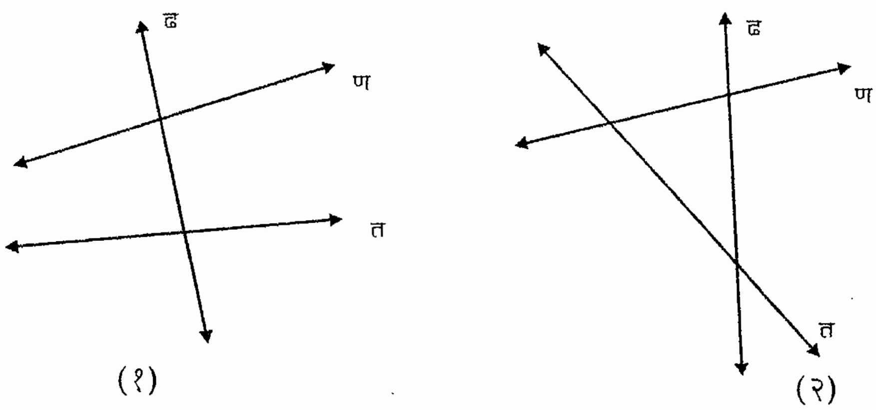
आ. ६.१५

आ. ६.१५ मध्ये रेषा ढ ही रेषा ण व रेषा त या दोन रेषांना छेदते. मग हिला आपण रेषा ण व त यांची छेदिका म्हणू का? कारण इथे तर ती दोन रेषांना छेदते आहे. नाही. इथेही रेषा ढ ही रेषा ण व त यांची छेदिका आहे. असे आपण म्हणणार नाही. कारण ती या दोन रेषांना एका व त्याच बिंदूत छेदते.

मग एखादी रेषा छेदिका असण्यासाठी कोणत्या अटी आवश्यक आहेत?

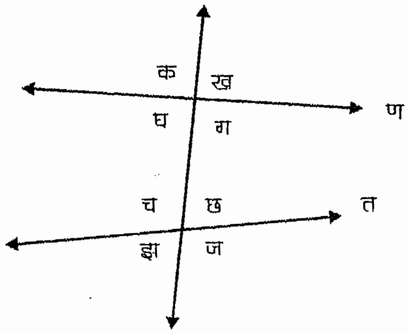
१. ती रेषा एकापेक्षा जास्त रेषांना छेदणारी असावी.
२. ती त्या रेषांना भिन्न बिंदूत छेदणारी असावी.

जर एखादी रेषा एकापेक्षा जास्त रेषांना भिन्न बिंदूत छेदत असेल तर ती रेषा त्या रेषांची छेदिका आहे असे म्हणतात.



आ. ६.१६

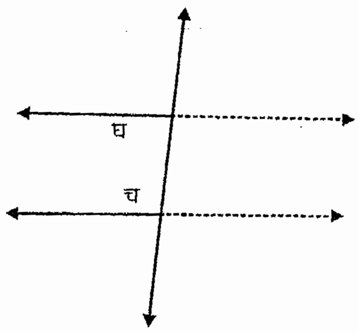
आ. ६.१६ (१) मध्ये रेषा ढ ही रेषा ण व त यांची छेदिका आहे का? (२) मध्ये प्रत्येक रेषा इतर दोन रेषांची छेदिका आहे. या विधानाचे स्पष्टीकरण आता तुम्ही सहज देऊ शकाल. समांतर रेषांच्या बाबतीत छेदिकांचे गुणधर्म फार मनोरंजक आहेत.



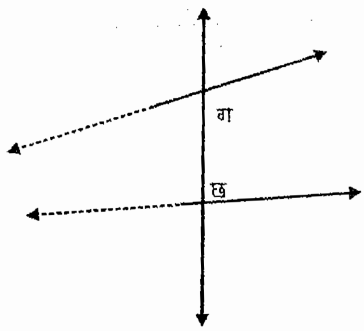
आ. ६.१७

आ. ६.१७ मध्ये रेषा ढ ही रेषा ण व त यांची छेदिका आहे. या छेदिकेमुळे एकूण आठ कोन तयार होतात. प्रत्येक कोन सोयीसाठी क,ख,ग,घ....इ. अक्षरांनी दाखवू. म्हणजे ∠क, ∠ख, ∠ग, ∠घ, ∠च, ∠छ, ∠ज व ∠झ हे ते आठ कोन आहेत असे आपण म्हणू.

आंतरकोन : या आठ कोनांपैकी ∠घ, ∠ग, ∠च आणि ∠छ या कोनांना आंतरकोन म्हणतात. आता ∠घ व ∠च या आंतरकोनांच्या जोडीचा विचार करा. हे कोन छेदिकेच्या एकाच अंगास आहेत. ∠ग व ∠छ ही छेदिकेच्या एकास अंगास असणाऱ्या आंतर कोनांची दुसरी जोडी होय.



(१)

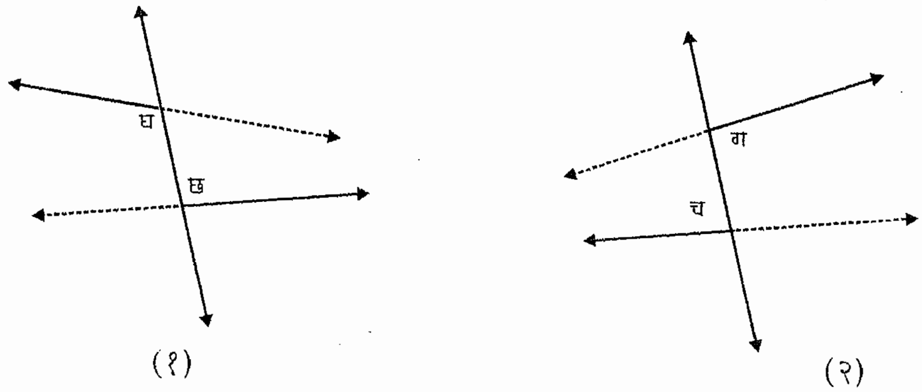


(२)

आ. ६.१८

आ. ६.१८ पाहा. अशा प्रकारच्या आंतरकोनांच्या फक्त दोनच जोड्या आपणांस मिळतात.

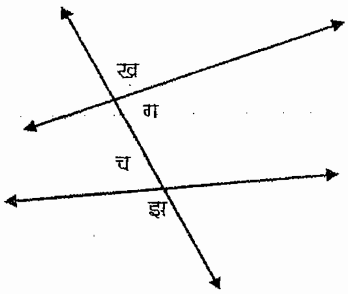
आंतरव्युत्क्रम कोन : आ. ६.१९ (१) मधील ∠घ व ∠छ या कोनांची जोडी पाहा.



आ. ६.१९

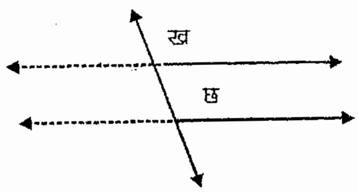
अशा कोनांना आंतरव्युत्क्रम कोन म्हणतात. ∠ग व ∠च ही अशा आंतरव्युत्क्रम कोनांची दुसरी जोडी होय.

हे आंतरव्युत्क्रम कोन छेदिकेच्या विरुद्ध अंगास आहेत हे तुमच्या लक्षात आले का? या दोन जोड्यांव्यतिरिक्त आंतरव्युत्क्रम कोनांची आणखी एखादी जोडी तुम्हांला आढळते का?



आ. ६.२०

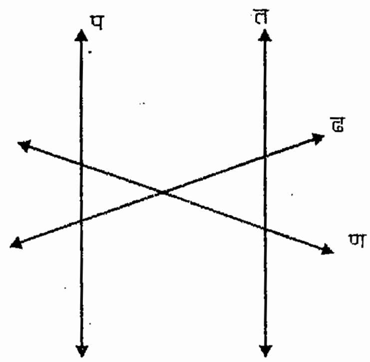
हे लक्षात घ्या की, आ. ६.२० मध्ये ∠ख व ∠च हे आंतरव्युत्क्रम कोन होणार नाहीत. तसेच, ∠ग व ∠झ यांनाही आंतरव्युत्क्रम कोन म्हणता येणार नाही. थोडक्यात, ∠घ, ∠छ व ∠ग, ∠च या (आ.६.१९) फक्त दोनच जोड्यांतील कोन आंतरव्युत्क्रम कोन म्हणून सांगता येतील.



आ. ६.२१

संगत कोन : आ. ६.२१ मधील ∠ख व ∠छ या कोनांना **संगतकोन** म्हणतात. संगत कोनांच्या अशा आणखी तीन जोड्या तुम्हांला आढळतात का?

६.५ प्रश्न :



आ. ६.२२

१. आ. ६.२२ मध्ये रेषा ढ, ण, त व प या चार रेषा एकप्रतलीय आहेत. रेषा प व ण या दोहोंपैकी कोणतीच रेषा प ला समांतर नाही. अशा परिस्थितीत खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ते सांगा.

(१) रेषा ढ, रेषा त व प यांची छेदिका आहे.

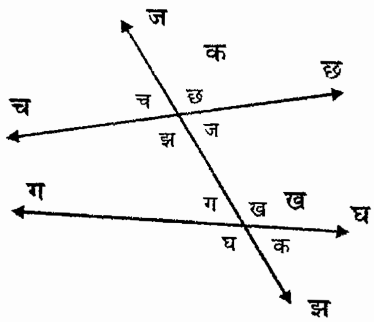
(२) रेषा ढ, रेषा प, ण, त यांची छेदिका आहे.

(३) रेषा प, रेषा ण, त, ढ यांची छेदिका आहे.

(४) रेषा त, रेषा ढ ची छेदिका आहे.

(५) रेषा त रेषा ण व ढ ची छेदिका आहे.

२. आ.२३ च्या आधारे रिकाम्या जागा भरा.



आ. ६.२३

(१) ∠ग व ∠च हे ....कोन आहेत.

(२) ∠ग व ∠ज हे ....कोन आहेत.

(३) ∠ज व ∠ख हे ....कोन आहेत.

(४) ∠झखघ व ....हे संगतकोन आहेत.

(५) ∠ग व ∠क हे ....कोन आहेत.

(६) ....व ∠छकख हे आंतरव्युत्क्रम कोन आहेत.

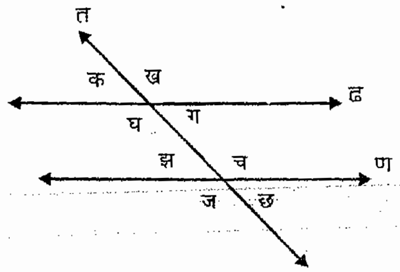
(७) ∠घकख व ....हे छेदिकेच्या एकाच अंगास असलेले आंतरकोन आहेत.

३. आ. ६.२३ च्या आधारे गट **क** मधील बाबींच्या गट **ख** मधील बाबींशी जोड्या लावा.

गट क	गट ख
(१) विरुद्ध कोन	(क) ∠ग व ∠ज
(२) संगतकोन	(ख) ∠छ व ∠घ
(३) आंतरव्युत्क्रम कोन	(ग) ∠झ व ∠ग
(४) कोनांची रेषीय जोडी	(घ) ∠ख व ∠घ
(५) छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन	(च) ∠ज व ∠ख
	(छ) ∠च व ∠झ
	(ज) ∠झ व ∠घ

§ ६.६ समांतर रेषा व छेदिका :

परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषांशी छेदिका जे कोन करते त्यांच्याशी आपला परिचय आता झाला आहे. दिलेल्या दोन रेषा समांतर असतील तर होणाऱ्या संगत कोनांच्या जोड्या एकरूप असतात व आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्याही एकरूप होतात हे जाणून घेण्यासारखे आहे.



आ. ६.२४

आ. ६.२४ मध्ये रेषा ढ व ण समांतर असून रेषा त ही त्यांची छेदिका आहे. यामध्ये ∠क ≅ ∠च, ∠ख ≅ ∠छ, ∠ग ≅ ∠ज व ∠क ≅ ∠झ आहेत हे तुम्हांला सहज पडताळून पाहता येईल.

दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणारे संगतकोन एकरूप असतात.

आपल्याला हेही पडताळून पाहता येईल की,

जर दोन रेषांना छेदिकेने छेदल्यामुळे होणाऱ्या संगतकोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

याचा अर्थ असा की, आ. ६.२४ मध्ये जर ∠क ≅ ∠च असेल तर रेषा ढ व ण ह्या समांतर असतात.

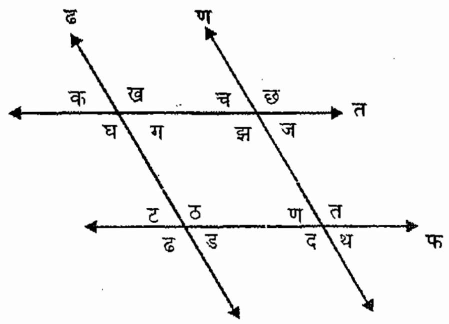
पुन्हा आ. ६.२४ कडे वळा. जर रेषा ढ व ण समांतर असतील तर ∠घ ≅ ∠छ व ∠ग ≅ ∠च. उलटपक्षी, जर ∠घ ≅ ∠च तर रेषा ढ व रेषा ण समांतर असतात.

दोन समांतर रेषांशी त्यांच्या छेदिकेने केलेल्या प्रत्येक आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी एकरूप असते. उलटपक्षी, जर दोन रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरव्युत्क्रम कोनांची कोणतीही एक जोडी एकरूप असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

§ ६.७ प्रश्न :

१. आ. ६.२५ मध्ये रेषा ढ व ण समांतर आहेत. तसेच रेषा त व फ समांतर आहेत. तर खालीलपैकी कोणती

विधाने सत्य आहेत ते सांगा.



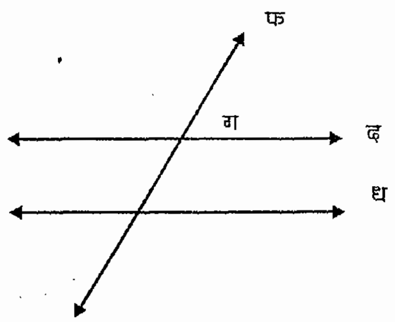
आ. ६.२५

(१) ∠क ≅ ∠ट (२)∠ड ≅ ∠थ
(३) ∠ठ ≅ ∠ण (४)∠क ≅ ∠च
(५)∠त ≅ ∠द (६)∠क ≅ ∠ड
(७)∠ट ≅ ∠ण (८)∠ट ≅ ∠थ
(९) m∠ग + m ∠झ = १८०
(१०) ∠द व ∠ग पूरक कोन आहेत.
(११) ∠ठ ≅ ∠ख

२. आ. ६.२५ च्या आधारे खालीलपैकी प्रत्येक विधानाला कारणे दया.
(१) ∠ज व ∠थ एकरूप आहेत. (२) ∠ढ व ∠ठ एकरूप आहेत.
(३)∠घ ≅ ∠ठ (४) ∠द व ∠झ ही कोनांची जोडी एकरूप आहे.
(५) m∠ग + m∠ठ = १८० (६) ∠ज ∠त पूरक कोन आहेत.
(७) ∠ड व ∠द या कोनांच्या मापांची बेरीज १८० आहे.

३. आ. ६.२५ मध्ये ण-घ = १३० असेल तर खालील कोनांची मापे काढा.
(१) ∠ठ (२) ∠ण (३) ∠ट

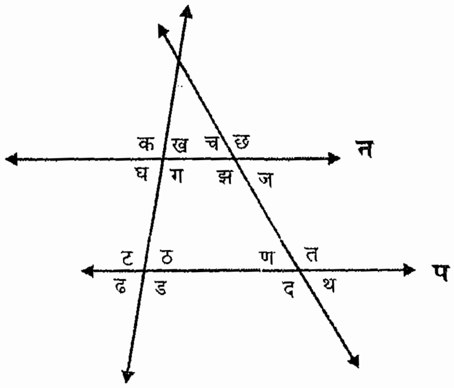
४. आ. ६.२६ मध्ये रेषा द व ध समांतर असून रेषा द ही त्यांची छेदिका आहे.



आ. ६.२६

जर m∠च = ४७ असेल तर इतर सर्व कोनांची मापे काढा.

५. आ. ६.२७ मध्ये रेषा न व प समांतर आहेत,



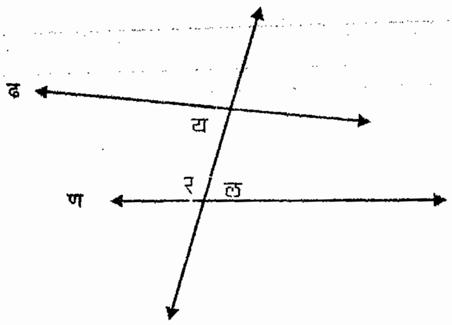
आ. ६.२७

जर $m\angle$क = १२० आणि

$m\angle$छ = १००

तर इतर सर्व कोनांची मापे काढा.

६. आ. ६.२८ च्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.



आ. ६.२८

(१) जर $m\angle$य = १०९ आणि $m\angle$र = ६९ असेल तर रेषा ढ व ण समांतर असतील का?

(२) जर $m\angle$ल = ७० तर रेषा ढ व ण समांतर होण्यासाठी $\angle$य चे माप काय असावे?

(३) जर $m\angle$य = १०० तर रेषा ढ व ण समांतर होण्यासाठी $\angle$र चे माप काय असावे?

(४) जर $m\angle$य = ६६, $m\angle$र = ११४ तर रेषा ढ व ण समांतर होतील का?

स्वाध्याय

१. चौकोन कखगड मध्ये $m\angle$क = $m\angle$ग = ७२ आणि $m\angle$ख = $m\angle$घ = १०८. तर खालील जोड्यांपैकी कोणत्या जोडया एकरूप आहेत?

(१) रेख कख आणि रेख घग (२) रेख कघ आणि रेख खग

(३) रेख कघ आणि रेख कख.

२. समांतरभुज चौकोन कखगड मध्ये रेख कग व रेख खघ हे कर्ण आहेत, तर पुढील जोड्या लिहा.

(१) समांतर रंषाखंड (२) आंतरव्युत्क्रम कोन

(३) छेदिका कख च्या एकाच अंगास असलेले आंतरकोन.

३. पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?

(१) दोन समांतर रेषांशी छेदिकेने केलेल्या आंतरकोनांची प्रत्येक जोडी एकरूप असते.

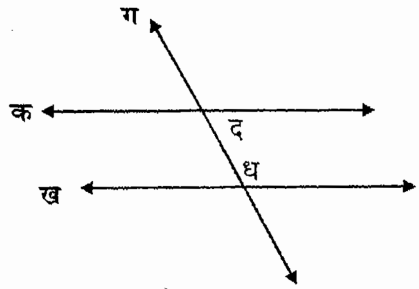
(२) जर दोन रेषांशी छेदिकेने केलेले संगतकोन एकरूप असतील तर त्या रेषा समांतर असतात.

(३) दोन वितलीय रेषांना सामावणारे एक प्रतल असू शकत नाही.

(४) जर दोन रेषा परस्परांस छेदत नसतील तर त्या समांतर असतात.

(५) दोन रेषांना एका व त्याच बिंदूत छेदणाऱ्या रेषेला छेदिका म्हणत नाहीत.

४. आ. ६.२९ मध्ये रेषा क आणि ख या समांतर रेषा आहेत व रेषा क ही त्यांची छेदिका आहे. जर ∠द चे माप ∠ध च्या मापापेक्षा २० ने जास्त असेल तर ∠द व ∠ध ची मापे काढा.



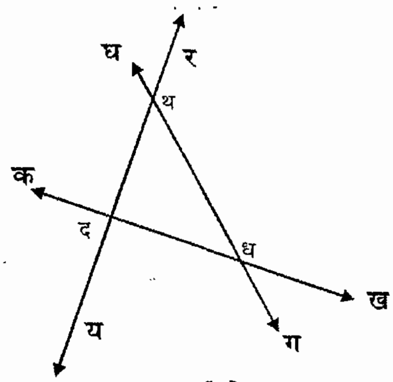
५. ☐ कखगड मध्ये -

(१) जर ∠कघख ≅ ∠घखग, तर कोणत्या दोन बाजू समांतर होतील?

(२) जर ∠खकघ व ∠कघग पूरक कोन असतील, तर चौकोनाच्या कोणत्या बाजू समांतर होतील?

(३) चौकोनाच्या बाजू खग व बाजू कघ समांतर होण्यासाठी ∠घखग शी कोणता कोन एकरूप व्हावा लागेल?

६. आ. ६.३० मध्ये दिलेल्या माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.



आ. ६.३०

(१) रेषा गघ व रेषा कख यांची छेदिका रेषा यर आहे, तर

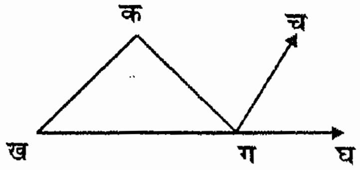
(क) छेदिकेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या आंतर कोनांच्या जोड्या सांगा.

(ख) आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या सांगा.

(ग) ∠घथर चा संगतकोन कोणता?

(२) जर रेषा यर व रेषा कख यांची छेदिका रेषा घग असेल तर आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या सांगा.

७. आ. ६.३१ मध्ये रेख कख व किरण गच समांतर आहेत.

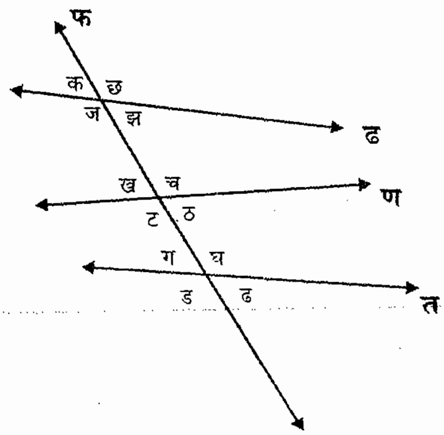


आ. ६.३१

(१) कोणते आंतरव्युत्क्रम कोन एकरूप आहेत?

(२) कोणते संगतकोन एकरूप आहेत?

८. आ. ६.३२ मध्ये रेषा ढ, ण, त यांची छेदिका रेषा फ आहे.



आ. ६.३२

(१) ∠क व ∠ख यांना कोणते कोन म्हणतात?

(२) ∠ज≅ ∠ट असेल तर कोणत्या रेषा समांतर होतील?

(३) जर ∠ट≅ ∠ड असेल तर कोणत्या दोन रेषा समांतर होतील?

(४) जर ∠ज≅ ∠ड तर कोणत्या दोन रेषा समांतर होतील?

(५) प्रश्न (२), (३) आणि (४) यांच्या उत्तरांवरून कोणता निष्कर्ष काढाल?

(६) समजा, रेषा त व ण समांतर दिल्या आहेत, तर केवळ एवढयावरून रेषा ढ व त समांतर आहेत असे म्हणता येईल का?

(७) समजा, रेषा ढ समांतर रेषा ण व ण समांतर रेषा त दिलेले आहे. यावरून रेषा ढ व त यांच्यासंबंधी काय निष्कर्ष निघतो?

प्रकरण ७
भौमितिक रचना

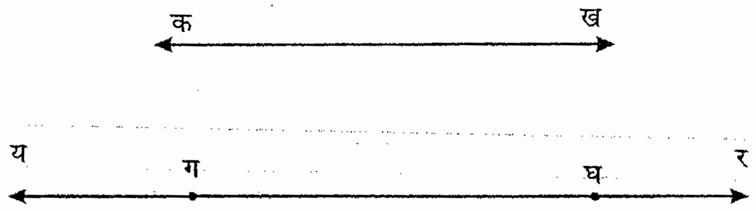
§ **७.१** व्यवहारात, तसेच भूमितीचा अभ्यास करताना आपल्याला निरनिराळ्या आकारांच्या व मापांच्या आकृती काढाव्या लागतात. आकृती अचूकपणे काढता येणे महत्त्वाचे आहे. आकृती काढण्याच्या पद्धतीला 'भौमितिक रचना' म्हणतात.

भौमितिक आकृती ज्या साधनांच्या साहाय्याने काढल्या जातात त्या साधनांशी तुम्ही परिचित आहांत. उदा. गुण्या, कंपास, स्केलपट्टी, कर्कटक इत्यादी. पण आपण ज्या भौमितिक रचनांचा अभ्यास करणार आहोत त्या सर्व सरळ कडा असलेली पट्टी व कंपास एवढ्याच साधनांच्या साहाय्याने करावयाच्या असतात. तरीही गुण्या व स्केल पट्टीचा उपयोग आपण पूर्णपणे टाळणार नाही.

एका वर्तुळाच्या सर्व त्रिज्या एकरूप असतात या गुणधर्माचा व एकरूप त्रिकोणांच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून या रचना केल्या जातात हे तुमच्या लक्षात येईल.

§ **७.२ रचना १.** दिलेल्या रेषाखंडाशी एकरूप असा दुसरा रेषाखंड काढणे.

समजा कख हा दिलेला रेषाखंड आहे. या रेषाखंडाशी एकरूप असा दुसरा रेषाखंड काढावयाचा आहे.



आ. ७.१

यर ही एक सरळ रेषा घ्या. या रेषेवर एक बिंदू ग घ्या. कंपासचे पोलादी टोक बिंदू क वर व पेन्सिलीचे टोक बिंदू ख वर ठेवून या दोन टोकांतील अंतर, कख या रेषाखंडाच्या लांबीएवढे घ्या. आता कंपासचे पोलादी टोक यर रेषेवरील क बिंदूवर ठेवा व पेन्सिलीच्या टोकाने यर रेषेला घ बिंदूत छेदणारा चाप काढा.
गघ या रेषाखंडांची लांबी दिलेला रेषाखंड कख याच्या लांबीएवढी आहे. (का?)
गघ हा रेषाखंड दिलेला रेषाखंड कख याच्याशी एकरूप असा दुसरा रेषाखंड आहे.

§ **७.३ प्रश्न :**

१. आ. ७.२ मध्ये रेषा ढ वर एक रेषाखंड यर दिला आहे. याच रेषेवर विरुद्ध बाजूला रेषाखंड कख एवढा दुसरा रेषाखंड कग काढा.



आ. ७.२

२. आकृती ७.३ मध्ये रेषा ढ वर एक रेषाखंड यर दिला आहे. याच रेषेवर रेषाखंड यर याच्याशी एकरूप असा दुसरा रेषाखंड दध काढा.

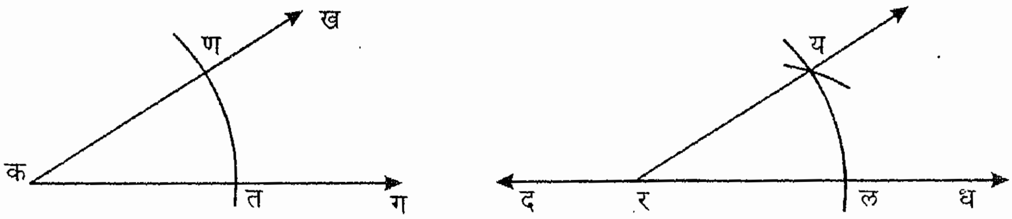


आ. ७.३

३. मोजपट्टीवरील ६.५ सेमी. लांबीच्या रेषाखंडाशी एकरूप असा एक रेषाखंड काढा.

§ ७.४ रचना २. दिलेल्या कोनाशी एकरूप असा दुसरा कोन काढणे.

समजा ∠खकग हा दिलेला कोन आहे.
या कोनाशी एकरूप असा दुसरा कोन काढावयाचा आहे.



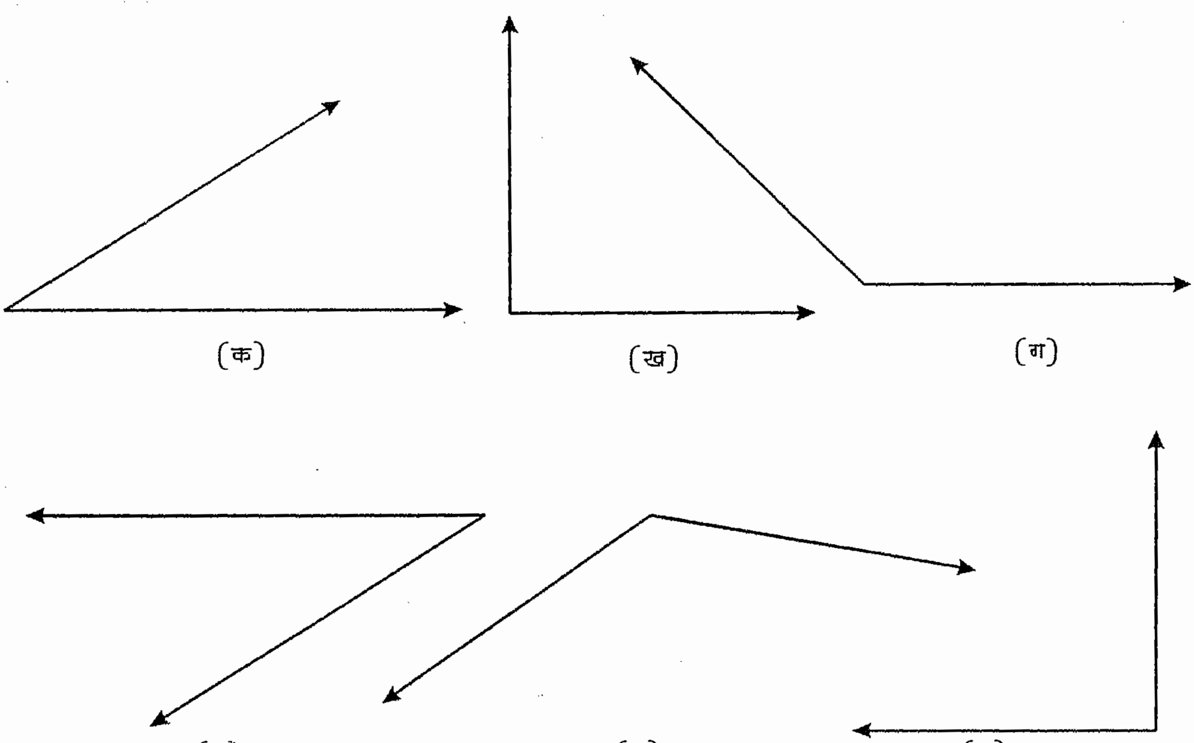
आ. ७.४

एक रेषा दध घेऊन तिच्यावर एक बिंदू र घ्या. बिंदू क केंद्र घेऊन सोयीस्कर त्रिज्येने भुजा कख आणि भुजा कग यांना अनुक्रमे ण आणि त बिंदूमध्ये छेदणारा चाप काढा. याच त्रिज्येने बिंदू र केंद्र घेऊन दध रेषेला ल बिंदूत छेदणास चाप काढा. आता कंपासमध्ये तण एवढे अंतर घ्या व बिंदू ल ला केंद्र घेऊन या त्रिज्येने पूर्वीच्या चापास य बिंदूमध्ये छेदणारा चाप काढा. किरण रय काढा.

∠यरल हा, दिलेला कोन ∠कखग याच्याशी एकरूप असा कोन आहे.

§ ७.५ प्रश्न :

१. खाली दिलेल्या प्रत्येक कोनाशी एकरूप असा एकेक कोन काढा.



(क) (ख) (ग)

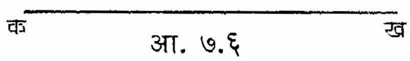
(घ) (च) (छ)

आ. ७.५

२. तुमच्या कंपासपेटीतील गुण्या कागदावर ठेवून गुण्याच्या एका लघुकोनाची आकृती काढा. या कोनाशी एकरूप असा दुसरा कोन काढा.
३. कोनमापकाचा उपयोग करून ६० व १५० मापाचे कोन काढा. या कोनांशी एकरूप असे कोन काढा.
४. कोणताही एक त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोनाशी एकरूप असा कोन वेगवेगळा काढा. कोनमापकाने कोन मोजून तुमची कृती बरोबर असल्याची खात्री करून घ्या.
५. दिलेल्या रेषेवरील एका बिंदूपाशी दिलेल्या प्रतलात दिलेल्या कोनाशी एकरूप असे दिलेल्या रेषेशी एकूण किती कोन काढता येतील?

§ ७.६ रचना ३. दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.

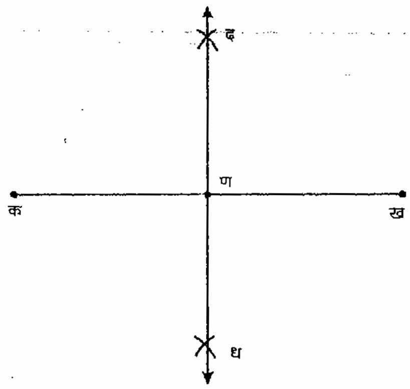
कख हा दिलेला रेषाखंड आहे.



आ. ७.६

कृती १ : कागदाची घडी अशी घाला की, त्यामुळे ख हा बिंदू क बिंदूवर येईल. घडीमुळे खक या रेषाखंडाचे दोन एकरूप भाग होतील. घडीवर पेन्सिलीने रेषा काढा. ही रेषा म्हणजेच कख या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक होय.

कृती २ : रेषाखंड कख च्या अर्ध्यापेक्षा जास्त लांबी कंपासच्या दोन टोकांत घ्या. कंपासचे पोलादी टोक बिंदू क वर ठेवून कख रेषेमुळे झालेल्या दोन्ही अर्धप्रतलात कंस काढा. आता कंपासचे पोलादी टोक ख बिंदूवर ठेवून दोन्ही अर्धप्रतलांत पूर्वी काढलेल्या कंसाना द व ध बिंदूत छेदणारे कंस काढा. द आणि ध बिंदूमधून जाणारी रेषा काढा. रेषा दध ही रेख कख ला ण बिंदूत छेदते.



आ. ७.७

रेषा दध ही रेख कख चा लंबदुभाजक आहे. बिंदू ण हा रेख कख चा मध्यबिंदू आहे.

अर्थात या एकाच कृतीने दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक आणि त्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू काढता येतो.

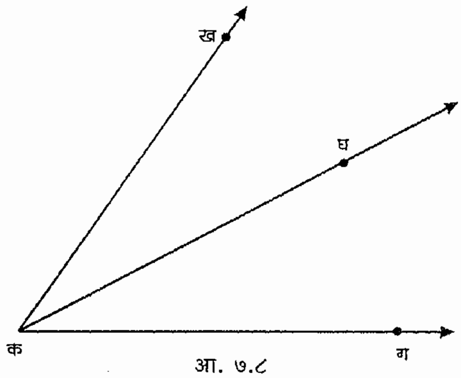
§ ७.७ प्रश्न :

१. रेख कख असा घ्या की l(कख) = ६.५ सेमी. या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढा. घडी घालण्याच्या पद्धतीने तुमची रचना बरोबर असल्याचा पडताळा घ्या.
२. ७.८ सेमी. लांबीचा रेख गघ काढा. या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढा. रेख गघ चे जे दोन भाग होतात त्यांची लांबी मोजून रचना बरोबर असल्याचे पाहा.
३. रेख दध असा घ्या की l(दध) = १२ सेमी. या रेषाखंडाचे चार एकरूप खंड करा. रेषाखंड दुभागण्याची रचना किती वेळा करावी लागली?

§ ७.८ रचना ४.

दिलेल्या कोनाचा कोनदुभाजक काढणे किंवा दिलेला कोन दुभागणे. समजा ∠खकग हा दिलेला कोन आहे.

कृती १ : कागदाची अशी घडी घाला की किरण कग हा किरण कख वर पडेल. बिंदू क हा कागदास पडणाऱ्या घडीवरच असेल. आता कागदाची घडी उलगडा. घडीच्या रेषेवर ∠खकग च्या अंतर्भागात एक बिंदू घ घ्या. किरण कघ काढा.

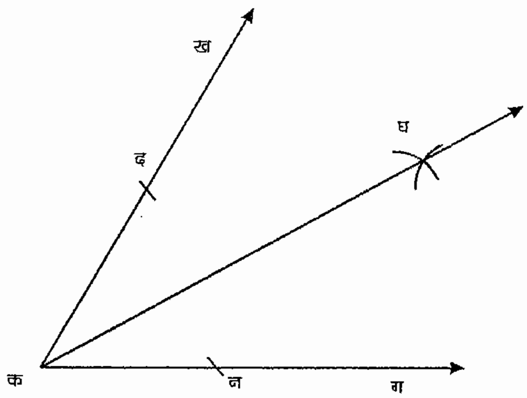


आ. ७.८

किरण कघ हा ∠खकग चा दुभाजक असेल म्हणजेच किरण कघ हा ∠खकग ची दुभागणी करतो.

कृती २ : कोणतीही एक त्रिज्या घेऊन व बिंदू क हा केंद्र घेऊन किरण कख आणि किरण कग यांना अनुक्रमे बिंदू द व बिंदू न मध्ये छेदणारा चाप काढा.

आता बिंदू द हा केंद्र घेऊन सोयीस्कर (रेख दन च्या निम्म्यापेक्षा जास्त) त्रिज्येने ∠खकग च्या अंतर्भागात एक चाप काढा. बिंदू न हा केंद्र घेऊन त्याच त्रिज्येने ∠खकग च्या अंतर्भागात असा चाप काढा की तो अगोदर काढलेल्या चापास घ बिंदूत छेदील. किरण कघ काढा.



आ. ७.९

किरण कघ ∠खकग चा दुभाजक आहे. म्हणजेच किरण कघ हा ∠खकग ची दुभागणी करतो.

§ ७.९ प्रश्न :

१. ४०, ७५, १२०, १३५ मापाचे कोन घेऊन त्यांची दुभागणी करा. घडी घालण्याच्या पद्धतीने प्रत्येक वेळी तुम्ही केलेली रचना बरोबर असल्याचा पडताळा घ्या.

२. १२० मापाच्या कोनाला चार एकरूप कोनांत विभागा. कोन दुभागण्याची रचना किती वेळा करावी लागली?

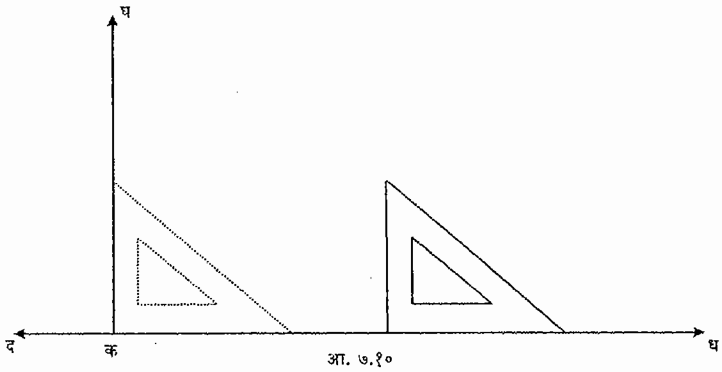
३. △कखग हा कोणताही एक त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाच्या सर्व कोनांची दुभागणी करा. सर्व दुभाजक एकाच

बिंदूतून जातात का हे पहा.

§ ७.१० रचना ५.

दिलेल्या रेषेस त्या रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून लंब काढणे.

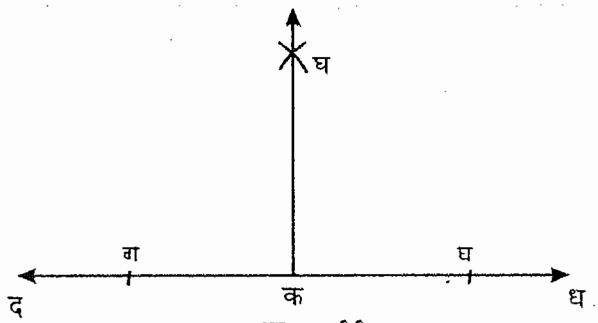
दध या रेषेवर क हा एक दिलेला बिंदू आहे.



आ. ७.१०

कृती १ : गुण्याच्या ज्या दोन बाजूंमध्ये काटकोन झालेला आहे त्यांपैकी एक बाजू दध रेषेशी चिकटून ठेवा. आता गुण्या अशा रीतीने सरकवा की त्याच्या काटकोन करणाऱ्या दोन बाजूंचा छेदनबिंदू क या बिंदूपाशी येईल. (आ. ७.१० पाहा.) आता गुण्याच्या दुसऱ्या बाजूशी पेन्सिलीने रेषा कघ काढा.

रेषा कघ ही दध या रेषेस लंब आहे.



आ. ७.११

कृती २ : बिंदू क केंद्र घेऊन कोणत्याही त्रिज्येने दध रेषेला बिंदू क च्या दोन्ही बाजूस अनुक्रमे बिंदू ग व बिंदू च मध्ये छेदा. आता बिंदू च केंद्र घेऊन सोयीस्कर त्रिज्येने (रेख गच च्या निम्म्या लांबीपेक्षा जास्त) दध रेषेच्या एका अंगास एक कंस काढा. बिंदू ग केंद्र घेऊन त्याच त्रिज्येने एक कंस असा काढा की, तो अगोदर काढलेल्या कंसास बिंदू घ मध्ये छेदील. बिंदू क व बिंदू घ मधून जाणारी रेषा काढा.

रेषा कघ ही रेषा दध ला लंब आहे.

§ ७.११ प्रश्न :

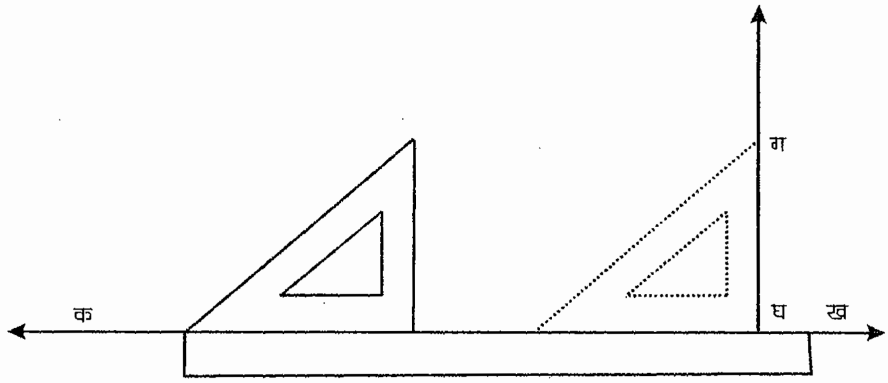
१. ७ सेमी. लांबीचा रेख कख घ्या. रेख कख वर बिंदू क पासून ३ सेमी. अंतरावर द हा एक बिंदू घ्या. बिंदू द मधून रेषा दध रेख कख ला लंब काढा.

२. रेख दध असा घ्या की l(दध) = ७.६ सेमी. रेख दध वर बिंदू ध पासून ३.५ सेमी. अंतरावर क बिंदू घ्या. बिंदू क मधून रेषा दध च्या दोन्ही अंगांस कख व कग लंब काढा. खकग ही सरळरेषा आहे का हे पाहा.

३. ५ सेमी. लांबीचा रेख कख घ्या. बिंदू क तसेच बिंदू ख मधून रेख कख च्या एकाच अंगास ४ सेमी. उंचीचे रेषाखंड कघ व रेषाखंड खग असे काढा की ते रेख कख ला लंब असतील. बिंदू घ व बिंदू क जोडून रेख घग ची लांबी मोजा. कखगघ ही आकृती कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे?

§ ७.१२ रचना ६.

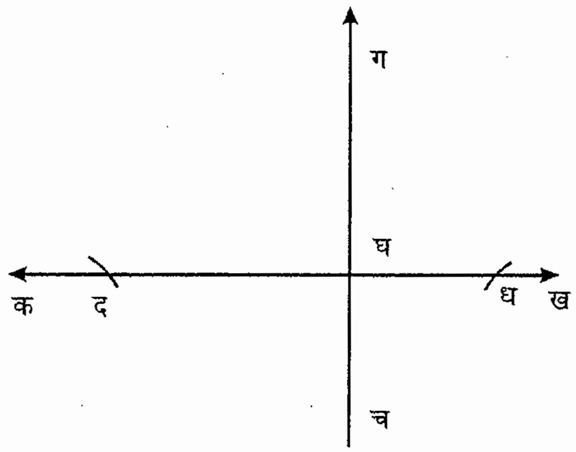
दिलेल्या रेषेला त्या रेषेबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून लंब काढणे. कख ही दीलेली रेषा आणि ग हा त्या रेषेबाहेरील दिलेला बिंदू आहे.



आ. ७.१२

कृती १ : पट्टीची सरळ कडा रेषा कख शी लावून ठेवा. गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूंपैकी एक बाजू आ. ७.१२ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे पट्टीशी जुळवा. आता पट्टी घट्ट धरून ठेवा. गुण्याची जी बाजू पट्टीशी लागून आहे ती तशीच चिकटून राहील याची दक्षता घेऊन गुण्या असा सरकवा की, त्याची काटकोन करणारी दुसरी बाजू ही ग बिंदूपाशी येईल. ग बिंदूतून कख रेषेला घ बिंदूत छेदणारी रेषा गघ काढा.

रेषा गघ ही कख रेषेवर लंब आहे.



आ. ७.१३

कृती २ : बिंदू ग हा केंद्र घेऊन कोणत्याही त्रिज्येने कख रेषेला बिंदू द व बिंदू ध मध्ये छेदा. आता बिंदू द व बिंदू

ध केंद्र घेऊन कोणत्याही सोयीस्कर त्रिज्येने (१/२।(दध) पेक्षा मोठी त्रिज्या) रेषा कख च्या दुसऱ्या अंगास परस्परांना च बिंदूत छेदणारे कंस काढा. बिंदू ग व बिंदू च मधून जाणारी रेषा काढा. ही रेषा, कख रेषेला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूला घ नाव दया.

रेषा कच ही कख रेषेला बिंदू घ मध्ये लंब आहे.

§ ७.१३ प्रश्न :

१. परस्परांना च बिंदूत छेदणाऱ्या दोन रेषा कख व गघ घ्या. कख रेषेवर बिंदू च पासून समान अंतरावर द व ध बिंदूतून गघ रेषेला अनुक्रमे न व प बिंदूत छेदणाऱ्या लंबरेषा काढा. रेख दन व रेख धप ची लांबी मोजा. हे दोन रेषाखंड एकरूप आहेत काय?

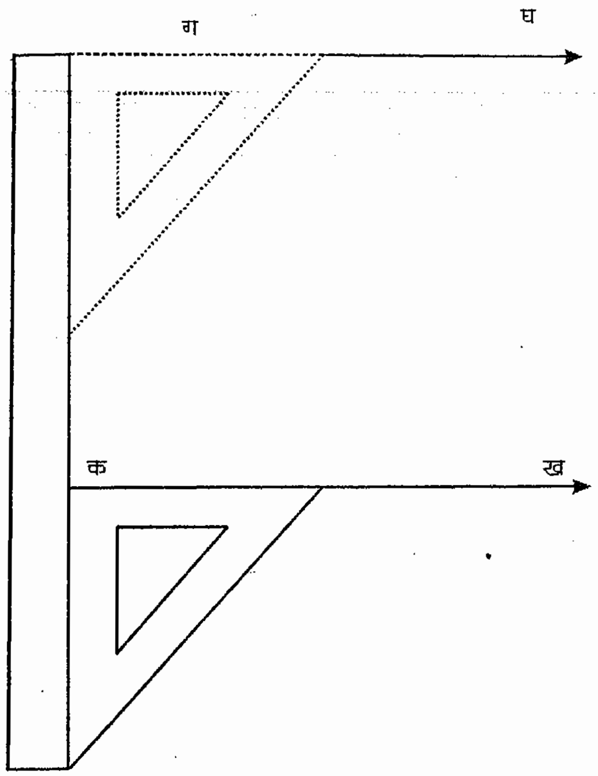
२. △कखग हा कोणताही एक त्रिकोण घ्या. त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूतून समोरील बाजूवर लंब काढा. तिन्ही लंबरेषा एका बिंदूतून जातात का हे पाहा.

३. □ कखगड हा एक आयत काढा. क व ग या शिरोबिंदूतून कर्ण खघ वर लंब काढा.

§ ७.१४ रचना ७

दिलेल्या रेषेला त्या रेषेबाहेरील दिलेल्या एका बिंदूतून समांतर रेषा काढणे.

रेषा कख ही दिलेली रेषा असून बिंदू ग हा त्या रेषेबाहेरील दिलेला बिंदू आहे.

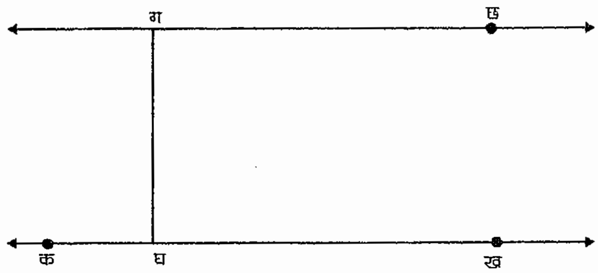


आ. ७.१४

कृती १ : आ. ७.१४ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे गुण्याची काटकोन करणारी एक बाजू कख या रेषेशी जुळवा व त्याच्या

काटकोन करणाऱ्या दुसऱ्या बाजूस एक सरळ पट्टी लावा. आता सरळ पट्टी घट्ट धरून ठेवा आणि गुण्या असा सरकवा की, त्याची एक बाजू पूर्वीप्रमाणेच पट्टीच्या बाजूशी चिकटून राहील व पूर्वी रेषा कख शी जुळवलेली बाजू ग बिंदूपाशी येईल. मग त्या बाजूने बिंदू ग मधून गघ रेषा काढा. रेषा गघ ही कख रेषेला समांतर आहे.

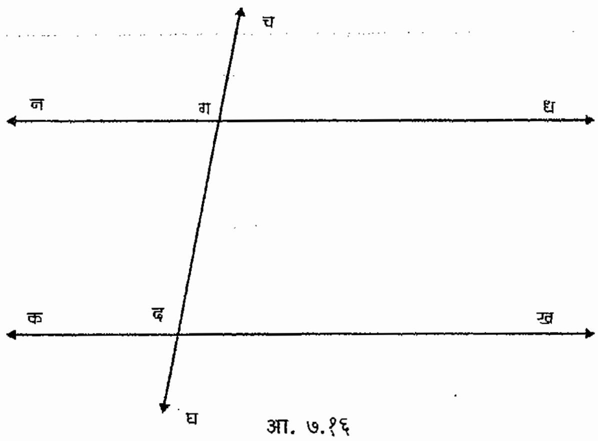
कृती २ : बिंदू ग मधून कख रेषेवर लंब काढा. ही लंब रेषा व रेषा कख यांच्या छेदनबिंदूस घ नाव दया. आता बिंदू ग मधून रेषा गछ ही रेख कघ ला लंब काढा. रेषा गछ ही कख रेषेला समांतर आहे.



आ. ७.१५

कृती ३ : ग या दिलेल्या बिंदूतून रेषा कख ला बिंदू द मध्ये छेदणारी कोणतीही एक रेषा चघ काढा. ग बिंदूपाशी ∠चगध असा तयार करा की ∠चगध ≅ ∠गदख बिंदू ग व ध मधून जाणारी रेषा नप काढा.

रेषा नध ही कख रेषेला समांतर आहे.



आ. ७.१६

§ ७.१५ प्रश्न :

१. रेख कख असा काढा की l(कख)=८ सेमी. रेख कख च्या बाहेर ग हा कोणताही एक बिंदू घ्या. या बिंदूतून कख रेषाखंडाला समांतर अशी रेषा गण काढा. बिंदू ग व क जोडा. ख बिंदूतून रेख गक ला समांतर रेषा काढा. ही रेषा, गण या रेषेला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूला घ नाव दया. □ कखगड हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन तयार झाला?

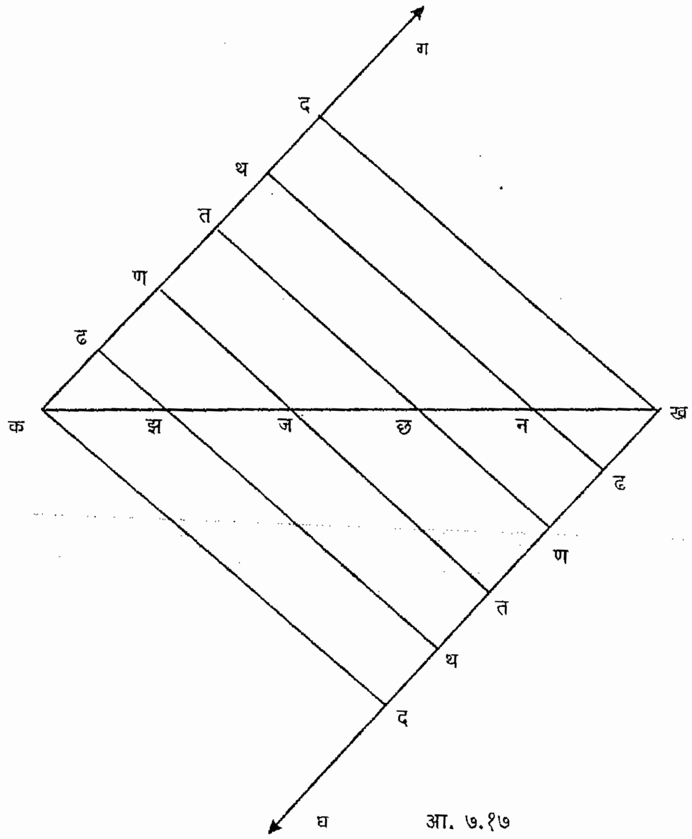
२. कोणताही एक △दधन काढा. बाजू दध चा मध्यबिंदू क घ्या. क बिंदूतून धन या बाजूला समांतर रेषा काढा. ही रेषा नद या बाजूला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूला ख हे नाव दया. रेख कख ची लांबी मोजा. या लांबीची, बाजू धन च्या लांबीशी तुलना करा.

३. एका रेषेत नसलेले कोणतेही तीन बिंदू घेऊन ते बिंदू त्रिकोणाचे शिरोबिंदू होतील असा त्रिकोण काढा. त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूतून समोरील बाजूला समांतर रेषा काढा. त्या एकमेकींना मिळेपर्यंत वाढवा. तयार झालेले

चार छोटे त्रिकोण परस्परांशी एकरूप आहेत का हे पाहा.

§ ७.१६ रचना ८.

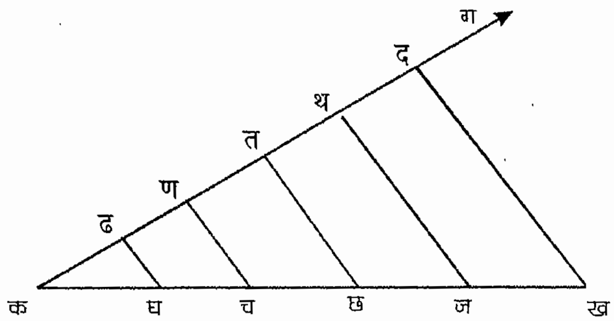
दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या संख्येइतके एकरूप भाग करणे. समजा कख हा दिलेला रेषाखंड असून त्याचे पाच एकरूप भाग करावयाचे आहेत.



आ. ७.१७

कृती १ : क आणि ख बिंदूपाशी कख या रेषाखंडाशी एकरूप कोन करणारे कग व खघ हे किरण कख रेषाखंडाच्या परस्पर-विरुद्ध अंगांस काढा. कग या किरणावर कढ, ढण, णत, तथ व थद तसेच खघ या किरणावर खढ, ढण, णत, तथ आणि थद असे सारख्या लांबीचे पाच पाच भाग करा. खद जोडा. तसेच थढ, तण, णत, ढथ आणि कद जोडा. या रेषा, रेख कख ला जेथे छेदतात त्या बिंदूंना अनुक्रमे न, छ, ज, झ अशी नावे दया. रेख कख चे रेख कझ, रेख झग, रेख जछ, रेख छन आणि रेख नख असे पाच एकरूप भाग झाले.

आता हीच रचना आणखी एका पद्धतीने करू.



आ. ७.१८

कृती २ : किरण कख च्या क बिंदूपाशी कोणताही लघुकोन करणारा किरण कग काढा. किरण कग वर कढ, ढण, णत, तथ आणि थद असे सारख्या लांबीचे पाच भाग करा. बिंदू द आणि बिंदू ख जोडा. बिंदू ढ,ण,त आणि थ मधून रेख ख ला समांतर रेषा काढा. या रेषा रेख कख ला ज्या बिंदूत छेदतात त्या बिंदूंना अनुक्रमे घ,च,छ व ज अशी नावे दया. रेख कख चे रेख कघ, रेख घच, रेख चछ, रेख छज आणि रेख जख असे पाच एकरूप भाग झाले.

§ ७.१७ प्रश्न :

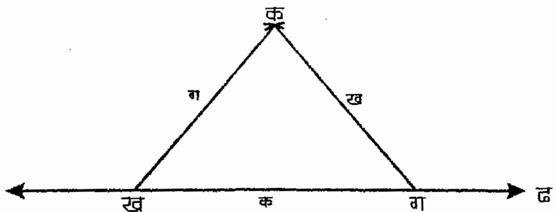
१. १२ सेमी. लांबीचा रेषाखंड घेऊन त्याचे सात एकरूप भाग करा. तुम्ही केलेली रचना बरोबर असल्याचा पडताळा कर्कटकाच्या साहाय्याने घ्या.

२. ८ सेमी. लांबीचा रेषाखंड घेऊन वरील पद्धतीने त्याचे चार एकरूप भाग करा. लंब दुभाजक काढण्याची पद्धत वापरून रचना बरोबर असल्याचा पडताळा घ्या.

३. रेख कख असा घ्या की l(कख) = ९.५ सेमी. या रेषाखंडाचे पाच एकरूप भाग करा.

§ ७.१८ रचना ९.

ज्याच्या तिन्ही बाजूंची लांबी दिली आहे असा त्रिकोण काढणे.



आ. ७.१९

समजा, △कखग असा काढावयाचा आहे की, l(कख) = क, l(गक) = ख आणि l(कख) = ग.

प्रथम एक रेषा ढ घ्या. या रेषेवर रेख खग हा असा घ्या की l(खग) = क. कंपासमध्ये ग इतके अंतर घेऊन, बिंदू ख केंद्र घेऊन रेषा ढ च्या एका अंगास एक कंस काढा. आता कंपासमध्ये ख एवढे अंतर घेऊन, बिंदू ग केंद्र घेऊन दुसरा कंस असा काढा की, तो पूर्वीच्या कंसाला क बिंदूत छेदील. कख व कग जोडा.

△कखग हा इष्ट त्रिकोण आहे.

§ ७.१९ प्रश्न :

१. △दधन असा काढा की l(दध) = ७ सेमी., l(धन) = ९ सेमी. व l(नद) = ५ सेमी.

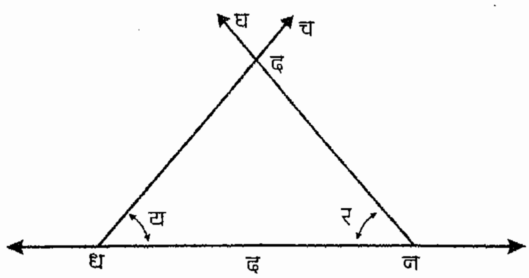
२. ६.५ सेमी., ५.८ सेमी. आणि ८.४ सेमी. लांबीच्या बाजू असलेला △ढणत काढा.

३. △कखग असा काढा की l(कख)= l(खग)= l(गक) = ७.५ सेमी. △कखग चे सर्व कोन मोजा. प्रत्येक कोनाचे माप किती आहे?

४. △घचछ असा काढा की l(घच)= l(छघ)= ८ सेमी. आणि l(चछ) = ५.५ सेमी. ∠च व ∠छ मोजा. हे दोन कोन एकरूप आहेत काय?

§ ७.२० रचना १०.

त्रिकोणाच्या एका बाजूची लांबी व त्या बाजूच्या टोकांपाशी असणाऱ्या कोनांची मापे दिली असता त्रिकोण काढणे.



आ. ७.२०

समजा, △दधन असा काढावयाचा आहे की, l(धन) = द, m∠ध =य आणि m∠न =र.

एक रेषा ढ घ्या. या रेषेवर रेषाखंड धन असा काढा की l(धन) = द. आता ध बिंदूमध्ये किरण धच असा काढा की m∠चधन = य. बिंदू न मधून किरण नघ असा काढा की m∠घनध = र. हे किरण परस्परांना ज्या बिंदूत छेदतात त्या बिंदूला द हे नाव दया.

△दधन हा इष्ट त्रिकोण आहे.

§ ७.२१ प्रश्न :

१. △दधन मध्ये l(धन)=७ सेमी., m∠ध = ५० आणि m∠न = ७०, △दधन काढा.

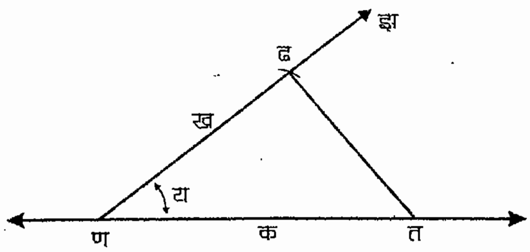
२. △ढणत असा काढा की l(णत)=१० सेमी., m∠ण = ३० आणि m∠त = ६०, बाजू तढ ची लांबी मोजा.

३. l(रल)=७.५ सेमी., m∠र = १२० आणि m∠ल = ३५ अशी मापे असणारा △यरल काढा.

§ ७.२२ रचना ११.

दोन बाजूंची लांबी आणि समाविष्ट कोनाचे माप दिले असता त्रिकोण काढणे.

समजा △ढणत असा काढावयाचा आहे की, l(णत)=क, l(ढण)=ख, व m∠ण = य.



आ. ७.२१

एक रेषा ढ घ्या. या रेषेतून रेख णत असा कापा की l(धन)=क, बिंदू ण मधून किरण णझ असा काढा की m∠झणत = य. कंपासमध्ये ख एवढे अंतर घ्या. ण बिंदू केंद्र घेऊन एक चाप असा काढा की तो किरण णझ ला ढ बिंदूत छेदील. ढत जोडा. △ढणत हा इष्ट त्रिकोण आहे.

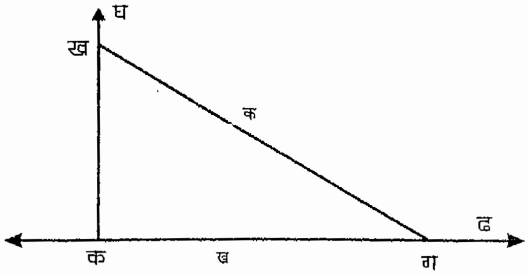
§ ७.२३ प्रश्न :

१. △दधन असा काढा की l(धन)=७.५ सेमी., m∠ध = ५० आणि l(दध)=६.५ सेमी.

२. l(णत)=७.८ सेमी., l(तढ)=६.४ सेमी. आणि m∠णतढ=६० ही मापे असणारा △ढणत काढा.

§ ७.२४ रचना १२.

कर्ण व एक बाजू यांची लांबी दिली असता काटकोन त्रिकोण काढणे.



आ. ७.२२

समजा △खकग असा काढावयाचा आहे की, m∠क = ९०, l(कग)=ख आणि l(खग)=क.
एक रेषा ढ घ्या. या रेषेवर रेख कग असा घ्या की l(कग)=ख. बिंदू क मधून रेषा ढ शी काटकोन करणारा किरण कघ काढा. आता कंपासच्या दोन टोकांमध्ये क एवढे अंतर घ्या. बिंदू क केंद्र घेऊन एक असा चाप काढा की, तो किरण कघ ला बिंदू ख मध्ये छेदील. खग जोडा. △खकग हा इष्ट काटकोन त्रिकोण आहे.

§ ७.२५ प्रश्न :

१. ज्याच्या कर्णाची लांबी १० सेमी. आणि एका बाजूची लांबी ६ सेमी. आहे असा काटकोन त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाची तिसरी बाजू मोजा.

२. काटकोन △यरल मध्ये∠य काटकोन असून l(रल)=१०.५ सेमी. आणि l(यर)=६.३ सेमी. △यरल काढा.

३. △दधन असा काढा की l(धन)=१२ सेमी. l(नध)=१३ सेमी. आणि m∠ध = ९०. l(दध) = ?

स्वाध्याय

१. ८.४ सेमी. लांबीचा एक रेषाखंड कख काढा. या रेषाखंडाचे सात एकरूप भाग करा.

२. △कखग असा काढा की l(कख)=६ सेमी., l(खग)=८ सेमी. आणि l(गक)=५.५ सेमी. या त्रिकोणाच्या सर्व कोनांचे दुभाजक काढा.

३. △दधन असा काढा की l(दध)=७ सेमी., l(धन)=६ सेमी. आणि m∠दधन = ६०. या त्रिकोणाच्या सर्व शिरोबिंदूतून समोरील बाजूवर लंब काढा.

४. l(णत)=८.५ सेमी. m∠ण = ४५, m∠त = ७५ मापे असणारा △ढणत काढा.

५. ज्याच्या बाजूंची लांबी प्रत्येकी ६ सेमी., आहे असा एक समभुज त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूच्या मध्यबिंदूतून त्या बाजूला लंब काढा. या लंबरेषा समोरील शिरोबिंदूतून जातात का हे पाहा.

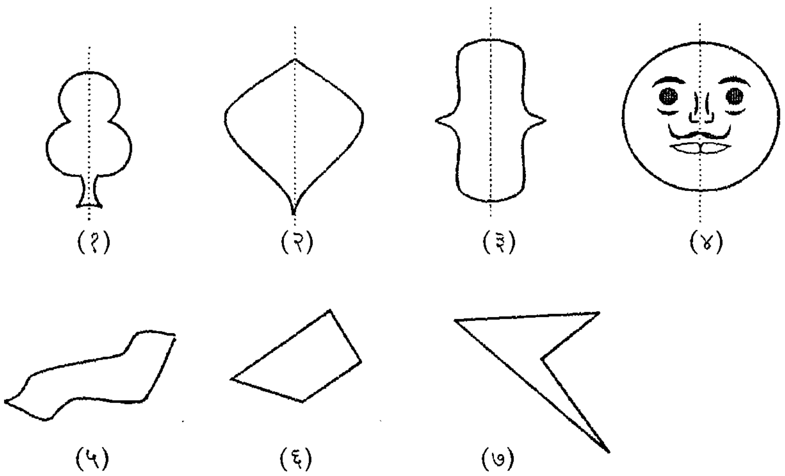
६. △कखग असा काढा कीं, m∠ख = ९०, l(खग)=४ सेमी.आणि l(गक)=५ सेमी. या त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूतून समोरील बाजूंशी समांतर रेषा काढा. या रेषा परस्परांना छेदतील अशा वाढवा. आता तयार झालेला त्रिकोण हा काटकोन त्रिकोण आहे का हे पाहा.

प्रकरण ८

सममिती व परावर्तन

§ ८.१ सममिती :

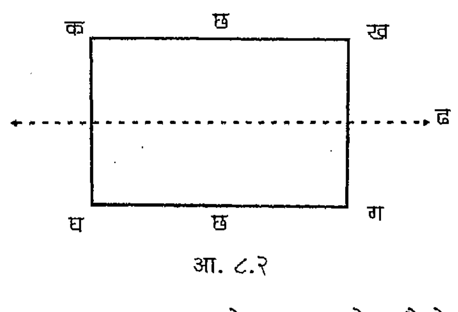
खालील चित्रात दाखवलेल्या आकृती पाहा. यांपैकी काही आकृतींमध्ये तुम्हांला काय वैशिष्ट्य दिसते?



आ. ८.१

(१) ते (४) या आकृतींमध्ये तुटक रेषेच्या दोन्ही बाजूंना या आकृतींचा आकार अगदी सारखा आहे. रेषेच्या एका बाजूला असलेल्या त्या आकृतीच्या एका भागाचे दुसरा भाग म्हणजे जणू काही प्रतिबिंबच होय. व्यवहारात दैनंदिन जीवनात अशा अनेक आकृती आपल्याला दिसतात. आईने किंवा ताईने घातलेली रांगोळी, फुलपाखराच्या दोन्ही पंखांवरील नक्षी, गणपतीच्या मखराची महिरप, झाडाचे पान या गोष्टींचे तुम्ही बारकाईने निरीक्षण केले तर तुम्हांला हेच आढळून येईल की, या आकृतींमध्यें एक प्रकारचा समतोलपणा आहे. आकृतीमध्ये असलेल्या या समतोलपणाच्या गुणधर्माला सममिती (Symmetry) म्हणतात व अशा प्रकारच्या आकृतींना सममित आकृती म्हणतात.

आ. ८.१ मध्ये (५), (६) व (७) या सममित आकृती नाहीत. भूमितीमध्ये तुमच्या परिचयाच्या अनेक सममित आकृती आहेत. त्यांच्यासंबंधी काही गुणधर्म शोधून काढणे मनोरंजक ठरेल. हे गुणधर्म शोधून काढण्यासाठी तुम्हांला काही व्यवसाय करावे लागतील, कृती करावी लागेल.



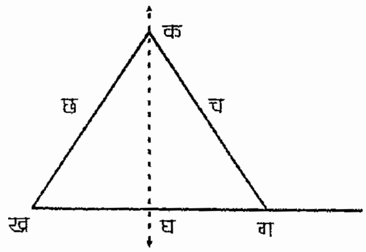
आ. ८.२

आ. ८.२ मध्ये काटकोन चौकोन कखगड दाखवला आहे. हा काटकोन चौकोन ज्या रेषेभोवती सममित आहे अशी एक रेषा ढ आकृतीत दाखविली आहे. एका कागदावर काटकोन चौकोन काढून त्यावर अशी रेषा काढा आणि काटकोन चौकोन त्या

रेषेवर दुमडून तो काटकोन चौकोन त्या रेषेभोवती सममित आहे याचा पडताळा घ्या.

जिच्याभोवती हा काटकोन चौकोन सममित आहे अशी आणखी एखादी रेषा काढा. कोणते दोन बिंदू जोडून ही रेषा मिळाली?

हे बिंदू रेख कख व रेख गघ यांचे मध्यबिंदू आहेत का पाहा.



आ. ८.३

आ. ८.३ मध्ये हा △ कखग समभुज त्रिकोण आहे. त्याच्या रेख खग, रेख गक व रेख कख यांचे मध्यबिंदू अनुक्रमे घ, च व छ आहेत. हा △ कखग रेषा कघ भोवती सममित आहे असे आपणास दिसते. आणखी दोन रेषांभोवती हा त्रिकोण सममित आहे.

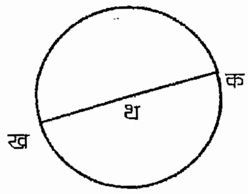
त्यांपैकी ख मधून जाणारी रेषा कोणती?

या तीन रेषांव्यतिरिक्त आणखी एखादी रेषा आहे का की जिच्याभोवती हा त्रिकोण सममित आहे?

हा त्रिकोण रेख खग भोवती सममित आहे का?

रेख चछ भोवती सममित आहे का?

मग एकूण किती रेषांभोवती हा त्रिकोण सममित आहे?



आ. ८.४

आ. ८.४ मध्ये थ केंद्र असलेले वर्तुळ दाखवले असून रेख कख हा त्याचा व्यास आहे. हे वर्तुळ त्या व्यासाला सामावणाऱ्या रेषेभोवती (सोयीकरता आपण व्यासाभोवती म्हणूया.) सममित आहे हे आपण सहज ओळखू शकतो.

हे वर्तुळ ज्या व्यासाभोवती सममित आहे असा आणखी एखादा व्यास काढून दाखवा.

वरील उदाहरणांवरून सममित आकृत्या म्हणजे काय हे तुमच्या लक्षात आलेच असेल.
कागदाच्या तुकड्यांच्या वेगवेगळ्या घड्या पाडून आकृत्यांची सममिती पडताळून पाहता येते. ज्या रेषेभोवती एखादी आकृती सममित असते त्या रेषेला त्या आकृतीच्या सममितीचा अक्ष (axis of symmetry) म्हणतात.

आता खालील प्रश्नांची उत्तरे दया. कागदाला घड्या घालून सममिती शोधण्याच्या पद्धतीने प्रथम तुमच्या उत्तराचा पडताळा घ्या.

१. काटकोन चौकोनात सममितीचे किती अक्ष असतात?

२. काटकोन चौकोनाचा कर्ण (कर्णाला सामावणारी) रेषा हा सममितीचा अक्ष होईल का?

३. काटकोन चौकोनाचा कर्ण हा त्या चौकोनाच्या सममितीचा अक्ष होण्यासाठी तो चौकोन कोणत्या प्रकारचा

असावा?

४. चौरसाला सममितीचे एकूण किती अक्ष असतात?

५. समभुज त्रिकोणाला सममितीचे किती अक्ष असतात? तसेच समदविभुज त्रिकोणाला सममितीचे किती अक्ष असतात?

६. समद्विभुज त्रिकोणाच्या सममितीचा अक्ष कोणती रेषा आहे?

७. वर्तुळाला सममितीचे किती अक्ष असतात?

८. वर्तुळ हे व्यासाभोवती सममिताकार आहे असे आपण म्हणतो त्याचा अर्थ काय?

९. क या अक्षराला सममितीचे किती अक्ष आहेत?

काही सममित आकृत्या व त्यांचे सममितीचे अक्ष यांच्यासंबंधी थोडी माहिती पुढील तक्त्यात दिली आहे.

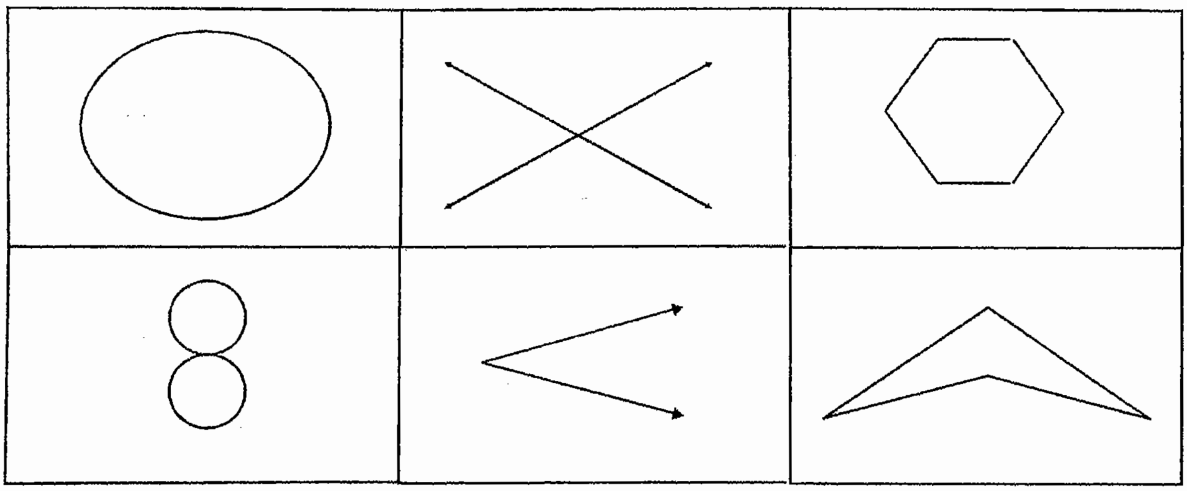
आकृती	अक्षांची संख्या	सममितीच्या अक्षाचे वर्णन
कोन	१	कोनाचा दुभाजक
विषमभुज त्रिकोण	-	-
काटकोन चौकोन	२	समोरासमोरील बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारी रेषा.
वर्तुळ	असंख्य	वर्तुळाचे व्यास
ण	१	ण

तुमच्या वहीत अशाच प्रकारचा तक्ता खालील आकृत्यांसाठी तयार करा.

समद्विभुज त्रिकोण, समभुज त्रिकोण, चौकोन, समांतरभुज चौकोन, चौरस, समभुज चौकोन व पतंग.

§ ८.२ प्रश्न :

१. खाली काही आकृत्या दिल्या आहेत त्यांचे सममितीचे सर्व अक्ष तुटक रेषांनी दाखवा व त्या अक्षांची संख्या त्या आकृतीखाली लिहा.



आ. ८.५

२. खाली सांगितल्याप्रमाणे प्रत्यक्ष कृती करून रंगीबेरंगी सममित आकृती काढा.

(१) सुताचा दोरा वेगवेगळ्या रंगाच्या शाईत बुडवा व तो एका कोऱ्या कागदावर ठेवा.

(२) त्या दोऱ्यावर कागदाची घडी अशी घाला की, दोऱ्याचे एक टोक घडीच्या बाहेर राहील.

(३) घडीवर तळहाताचा दाब देऊन दोऱ्याचे टोक ओढा व सर्व दोरा बाहेर काढा.

(४) आता घडी उघडा. तुम्हांला सुंदरशी सममित आकृती मिळते.

या सर्व आकृतींच्या बाबतीत सममितीचे अक्ष कोणते असतील?

३. खालील प्रश्नांची उत्तरे दया :

(१) कोणत्या त्रिकोणाला सममितीचा फक्त एकच अक्ष राहील?

(२) ज्या त्रिकोणाला सममितीचे केवळ दोनच अक्ष असतात असा त्रिकोण कोणता?

(३) कोणत्या त्रिकोणाला सममितीचा एकही अक्ष नसतो?

(४) कोणत्या आकृतीला सममितीचे असंख्य अक्ष असतात?

(५) ज्या चौकोनाला सममितीचे चार अक्ष असतात असा चौकोन कोणता?

(६) कोणत्या प्रकारच्या चौकोनात फक्त कर्ण सामावणाऱ्या रेषाच त्याच्या सममितीचा अक्ष असतात?

§ ८.३ परावर्तन :

आरशात आपण आपले प्रतिबिंब पाहतो. आरशासमोर ठेवलेल्या कोणत्याही वस्तूचे प्रतिबिंब आरशामागे दिसते. आरशासमोर ठेवलेल्या पदार्थाचे आरशामागे दिसणारे प्रतिबिंब आरशापासून किती अंतरावर असते हे तुम्ही भौतिकशास्त्रात टाचण्यांच्या साहाय्याने पाहिले. तो प्रयोग आठवा. त्या प्रयोगातून खालील दोन निष्कर्ष निघाले.

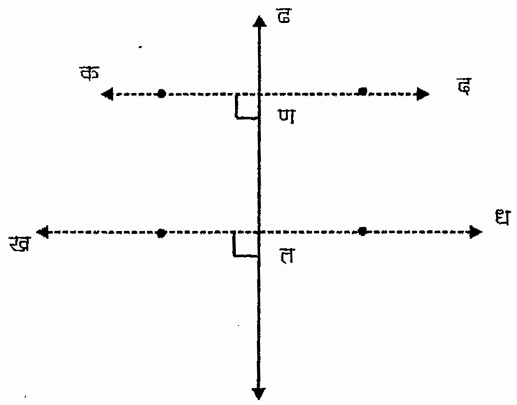
(१) आरशासमोर ठेवलेल्या द पदार्थाची ध प्रतिमा आरशामागे तितक्याच अंतरावर मिळते.

(२) पदार्थ व प्रतिमा यांची ठिकाणे जोडणारी रेषा आरशाच्या प्रतलाला लंब असते.

अशा द पदार्थाची ध ही **परावर्तन प्रतिमा** आहे असे आपण म्हणतो.

आरशाची कडा सामावणारी रेषा प्रतलाला दोन अर्धप्रतलांत विभागते. एका अर्धप्रतलात पदार्थ असल्यास दुसऱ्या अर्धप्रतलात त्याची प्रतिमा मिळते. भूमितीतही अशा प्रकारचा विचार करण्यासारख्या परिस्थिती उद्‌भवतात. त्यांनाही परावर्तन म्हणतात.

§ ८.४ बिंदूचे रेषेतील परावर्तन :



आ. ८.६

दिलेल्या बिंदूचे दिलेल्या रेषेपासून अंतर म्हणजे त्या बिंदूपासून त्या रेषेवर काढलेल्या लंब रेषाखंडाची लांबी असते हे आपण जाणतो.

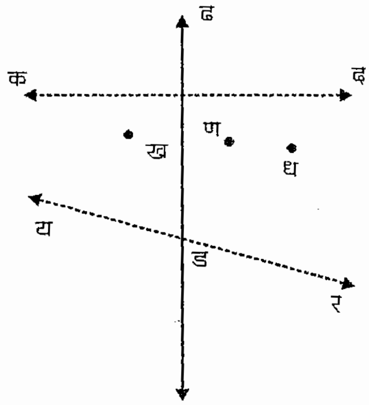
क बिंदूचे रेषा ढ पासूनचे अंतर म्हणजे d(क,ण) होय. आ.(८.६). ख बिंदूचे रेषा ढ पासून अंतर किती?

आ. ८.६ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे.

d(क,ण) = d(द,ण) आणि

d(ख,र) = d(ध,न).

अशा वेळेस द ला क ची रेषा ढ मधील **परावर्तन प्रतिमा** असे म्हणतात आणि ढ रेषेला **परावर्तनाची रेषा** असे म्हणतात.



आ. ८.७

आ. ८.७ मध्ये रेषा ढ ही परावर्तनाची रेषा आहे.

(क) द ही क ची परावर्तन प्रतिमा आहे. तर = d(क,ण) व = d(द,ण) यांच्यात काय संबंध असेल असे तुम्हांला वाटते?

(ख) रेषा ढ व रेख कद यांच्यामुळे किती मापाचा कोन निश्चित होतो?

(गुण्याच्या साह्याने तुमचे उत्तर पडताळून पाहा.)

(ग) ख बिंदूची ढ रेषेमधील परावर्तन प्रतिमा ध असेल तर ध आणि ख बिंदूच्या रेषा ढ पासूनच्या अंतरामध्ये कोणता संबंध आढळतो?

(घ) ढ रेषेच्या ख बिंदूकडील अंगास ग बिंदू असा घ्या की त्याचे व क चे ढ रेषेपासूनचे अंतर समान राहील. तर क ला ग ची परावर्तन प्रतिमा म्हणता येईल का? कारण सांगा.

(च) आता ढ रेषेच्या ध बिंदूकडील अंगास न हा बिंदू असा घ्या की क व न बिंदूंचे रेषा ढ पासूनचे अंतर समान राहील. न ही क ची परावर्तन प्रतिमा होईल का? कारण सांगा.

(छ) ण बिंदूची परावर्तन प्रतिमा कोणती असेल असे तुम्हांस वाटते?

(ज) रेषा ढ च्या दोन विरुद्ध अंगांस य आणि र हे बिंदू असे आहेत की,

d(य,ड) = d(र,ड). तरी पण य ची परावर्तन प्रतिमा र आहे असे आपण का म्हणत नाही?

(झ) आकृती ध ची परावर्तन प्रतिमा कोणती? ध च्या अशा किती परावर्तन प्रतिमा मिळतात?

(ट) रिकाम्या जागा भरा.

१. दिलेल्या, बिंदूची दिलेल्या रेषेतील परावर्तन प्रतिमा म्हणजे असा बिंदू की जो

(क) रेषेच्या ------अंगास असतो,

(ख)दिलेल्या बिंदूतून रेषेवर काढलेल्या------वर असतो,

(ग) त्याचे रेषेपासूनचे अंतर व दिलेल्या बिंदूचे रेषेपासूनचे अंतर ही अंतरे -----असतात.

२. य ची परावर्तन प्रतिमा र असेल तर र ची परावर्तन प्रतिमा ------बिंदू राहील.(तोच/वेगळा).

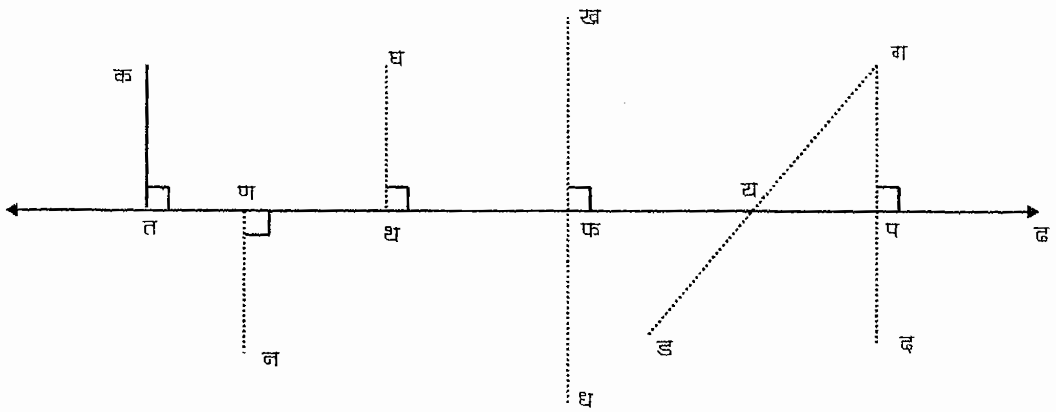
यावरून खालील गोष्टी लक्षात येतात.

१. दिलेल्या बिंदूची रेषेतील परावर्तन प्रतिमा बिंदूच असते व ती एकमेव असते.

२. दिलेली रेषा ही जर दोन बिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडाची लंब दुभाजक रेषा असेल तर त्यांपैकी एक बिंदू दुसऱ्याची परावर्तन प्रतिमा असते व दिलेली रेषा परावर्तन रेषा असते.

३. परावर्तन रेषेवरील बिंदूची परावर्तन प्रतिमा तोच बिंदू असते.

§ ८.५ प्रश्न :



आ. ८.८

आ. ८.८ मध्ये रेषा ढ ही परावर्तन रेषा आहे. तिच्या एका अंगास क,ख,ग व घ हे बिंदू व दुसऱ्या अंगास द,ध,न व ड हे बिंदू दिले आहेत. या आकृतीच्या संदर्भात पुढील प्रश्नांची उत्तरे दया. (सर्व परावर्तने ढ रेषेमधील आहेत.)

(१) ग ची परावर्तन प्रतिमा कोणती?

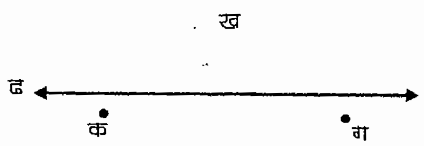
(२) ध ची परावर्तन प्रतिमा कोणती?

(३) जरी d(ग,प) = d(ग,थ) तरी न ला ग ची परावर्तन प्रतिमा का म्हणता येत नाही?

(४) जरी d(न,ण) d(ग,प) आणि न व ग हे ढ रेषेच्या विरुद्ध अंगास असले तरी न ही ग ची परावर्तन प्रतिमा आहे असे का म्हणता येत नाही?

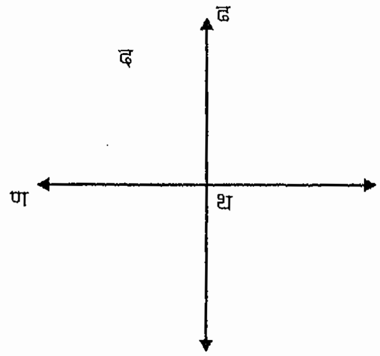
(५) ग आणि ड हे बिंदू रेषा ढ च्या विरुद्ध बाजूस आहेत आणि
d(ग,य) = d(ड,य) तरीपण ड ला ग ची परावर्तन प्रतिमा का म्हणता येणार नाही?

(६) आकृतीत ढ रेषेच्या त्या बाजूला ख आहे त्याच बाजूला क बिंदू आहे. ती क ची परावर्तन प्रतिमा ढ रेषेच्या कोणत्या बाजूला राहील?



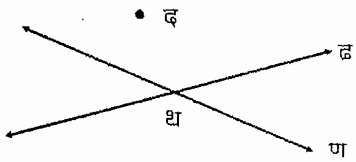
आ. ८.९

२. आ. ८.९ मध्ये रेषा ढ दिली आहे. क, ख व ग बिंदूंच्या त्यातील परावर्तन प्रतिमा काढा.



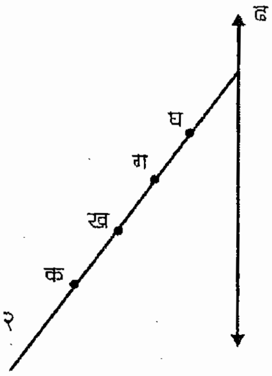
आ. ८.१०

३. आ. ८.१० मध्ये रेषा ढ व ण परस्परांना काटकोनात छेदतात. बिंदू द च्या रेषा ढ व रेषा ण यांतील परावर्तन प्रतिमा काढा. त्या प्रतिमांना अनुक्रमे $द_{१}$ व $द_{२}$ ही नावे दया. $द_{१}$, $द_{२}$ व थ या तिन बिंदूंमध्ये तुम्हांला कोणता संबंध आढळतो?



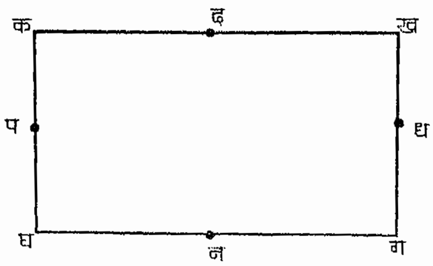
आ. ८.११

४. आ. ८.११ मध्ये परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषा दाखवल्या आहेत. द बिंदूच्या त्या दोन रेषांमधील परावर्तन प्रतिमा काढा. त्यांना अनुक्रमे $द_{१}$, $द_{२}$ अशी नावे दया. या वेळी $द_{१}$, थ, $द_{२}$ या तीनयत बिंदूंत तुम्हांला काही संबंध आढळतो की काय ते पाहा.



आ. ८.१२

५. क,ख,ग आणि घ या बिंदूंच्या रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा काढा. क,ख,ग,ड हे एकरेषीय आहेत हे आ. ८.१२ वरून स्पष्ट आहे. त्यांच्या परावर्तन प्रतिमांच्या एकरेषीयतेबद्दल काय सांगता येते?

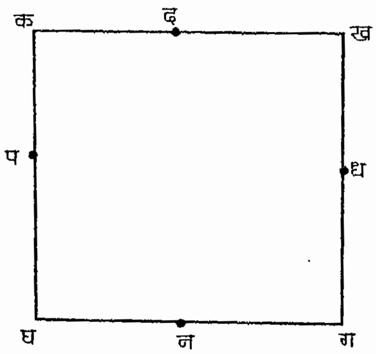


आ. ८.१३

६. आ. ८.१३ मध्ये द,ध,न,प हे बिंदू काटकोन चौकोन कखगड च्या बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत. तर खालील तक्त्यातील रिकाम्या जागा भरा.

क्र.	बिंदू	परावर्तन रेषा	परावर्तन प्रतिमा
१	द	रेषा पध	--
२	--	रेषा दन	क
३	ख	--	ग
४	प	--	ध
५	न	रेषा पध	--
६	प	रेषा पध	--
७	--	रेषा दन	न

७. आ. ८.१४ मध्ये द,ध,न,प हे चौरस कखगघ च्या बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत.



आ. ८.१४

आकृतीच्या आधारे खालील रिकाम्या जागा भरा.

१. जर ध बिंदू द ची परावर्तन प्रतिमा व्हावयाची असेल तर रेषा ------ही परावर्तन रेषा असेल.

२. जर ध हा न ची परावर्तन प्रतिमा व्हावयाची असेल तर रेषा ------ ही परावर्तन रेषा असेल.

३. रेषा कग ही जर परावर्तन रेषा असेल तर

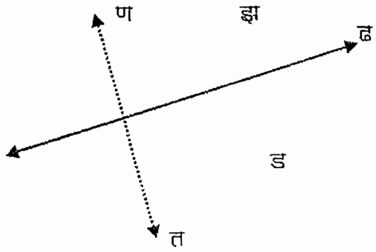
प ची परावर्तन प्रतिमा ----- राहील.

घ ची परावर्तन प्रतिमा ----- राहील.

क ची परावर्तन प्रतिमा ----- राहील.

४. जर ग ची परावर्तन प्रतिमा ख असेल तर परावर्तन रेषा ----- असेल.

§ ८.६ परावर्तन व एकास-एक संगती :

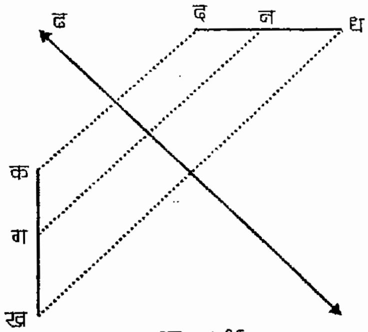


आ. ८.१५

एका प्रतलातील रेषा ढ चा विचार करा. ही रेषा प्रतलाचे दोन अर्धप्रतलांत विभाजन करते. ती दोन अर्धप्रतले झ व ड आहेत असे समजा. समजा झ प्रतलांत ण बिंदू असून त्याची ड ह्या अर्धप्रतलातील परावर्तन प्रतिमा त आहे. ही प्रतिमा एकमेव आहे. तसेच द ची ण ही एकमेव प्रतिमा आहे. म्हणजेच ण व त ह्या परस्परांच्या एकमेव प्रतिमा आहेत. यावरून आपण म्हणू की झ या अर्धप्रतलातील प्रत्येक बिंदूशी ड प्रतलांतील त्या बिंदूची परावर्तन प्रतिमा असलेला एकमेव बिंदू निगडित असतो. तसेच ड प्रतलातील प्रत्येक बिंदूशी झ प्रतलातील त्या बिंदूची परावर्तन प्रतिमा असलेला एकमेव बिंदू निगडित असतो. यावरुन, झ या अर्धप्रतलातील बिंदूंची ड या अर्धप्रतलातील बिंदूंशी एकास-एक संगती असते.

परावर्तन रेषेमुळे मिळालेल्या दोन अर्धप्रतलांपैकी एका अर्धप्रतलातील सर्व बिंदू व दुसऱ्या अर्धप्रतलातील त्यांच्या प्रतिमा असणारे बिंदू यांची एकास-एक संगती असते.

§ ८.७ रेषाखंडाचे परावर्तन :



आ. ८.१६

आ. ८.१६ मध्ये रेषा ढ च्या एका अंगास रेख कख दाखवला आहे. द आणि ध ह्या अनुक्रमे क आणि ख ह्यांच्या परावर्तन प्रतिमा आहेत, असे समजा, द,ध जोडा.

रेख कख वर ग हा कोणताही बिंदू घ्या. या बिंदूची परावर्तन प्रतिमा न काढा. हा न बिंदू रेख दध वर आहे असे दिसते. आता रेख कख वर नसलेला ड बिंदू घ्या. याची परावर्तन प्रतिमा प हा बिंदू रेख दध वर आहे का पाहा. तो रेख दध वर मिळत नाही.

याचा अर्थ असा की, रेख कख वर असलेल्या सर्व बिंदूंच्या प्रतिमा रेख दध वर मिळतात व रेख कख वर नसलेल्या बिंदूंच्या प्रतिमा रेख दध वर मिळत नाहीत. म्हणजेच रेख कख ची परावर्तन प्रतिमा रेख दध आहे.

क आणि ख च्या दरम्यानच्या सर्व बिंदूंच्या प्रतिमा द आणि ध च्या दरम्यान मिळतात. त्यामुळे रेषा-खंडाच्या

परावर्तनात दरम्यानतेचा गुणधर्म राखला जातो.

रेख कख व रेख दध यांच्या लांबीची तुलना करा. यांची लांबी समान आहे असे दिसते. त्यामुळे रेख कख व त्याची परावर्तन प्रतिमा रेख दध हे एकरूप रेषाखंड होतात.

रेख कख व त्याची परावर्तन प्रतिमा रेख दध यांची मिळून बनलेली आकृती पाहा. आपल्याला एक सममित आकृती दिसते. या सममित आकृतीच्या सममितीचा अक्ष कोणता आहे?

खालील निष्कर्ष लक्षात घ्या.

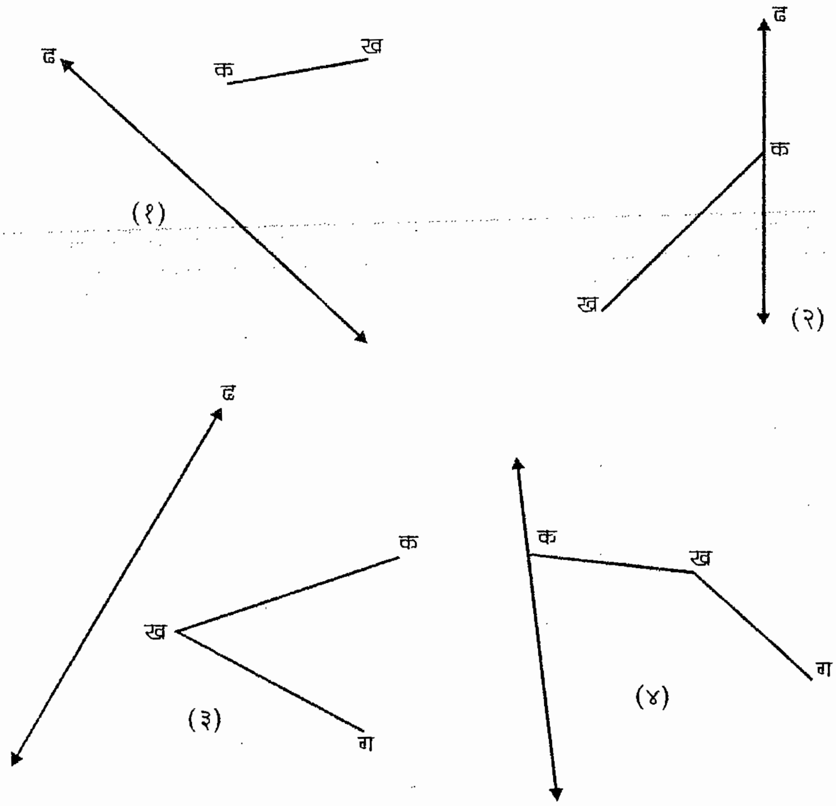
१. रेषाखंडाची परावर्तन प्रतिमा रेषाखंड असते.

२. रेषाखंड हा त्याच्या परावर्तन प्रतिमेशी एकरूप असतो.

३. रेषाखंड व त्याची परावर्तन प्रतिमा मिळून एक सममित आकृती तयार होते.

४. परावर्तन रेषा ही या आकृतीच्या सममितीचा अक्ष असते.

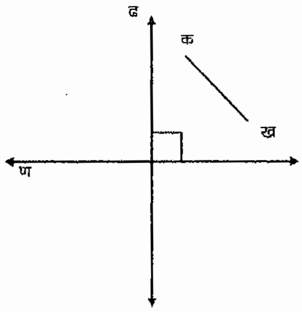
§ ८.८ प्रश्न :



आ. ८.१७

१. शेजारील आकृतीत रेख कख व रेख खग च्या ढ रेषेमधील परावर्तन प्रतिमा काढा. मूळ रेषाखंडांच्या व त्यांच्या प्रतिमांच्या लांबींची तुलना करा.

२. आ. ८.१८ मध्ये रेषा ढ व ण या परस्परांना लंब आहेत. रेख कख हा दिलेला रेषाखंड आहे. खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

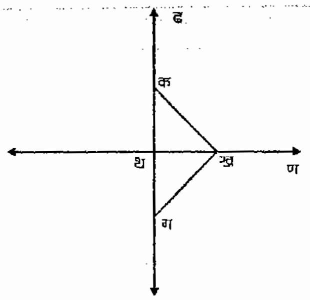


आ. ८.१८

(१) रेख कख ची रेषा ढ मध्ये प्रतिमा काढा. ही प्रतिमा म्हणजे कोणती भूमितीय आकृती आहे?
(२) रेख कख ची रेषा ण मध्ये प्रतिमा काढा. ही प्रतिमा म्हणजे कोणती भूमितीय आकृती आहे?
(३) या दोन्ही प्रतिमांचे निरीक्षण करा. या प्रतिमा समांतर आहेत का?
(४) यावरून निघणारा निष्कर्ष खाली सांगितला आहे. त्यात रिकाम्या जागा भरा.

निष्कर्ष : जर रेषा ढ व रेषा ण या ------- असतील तर रेख कख च्या त्यांच्यामधील परावर्तन प्रतिमा ----- असतात.

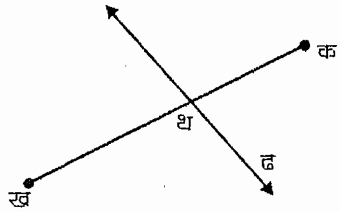
(५) रेषा ढ व रेषा ण या लंब नसतील तरी हा निष्कर्ष निघतो का?
(६) जर रेषा ढ व ण या समांतर असतील तर त्यांच्यातील रेख कख च्या परावर्तन प्रतिमांसंबंधी काय सांगता येईल?



आ. ८.१९

३. आ. ८.१९ मध्ये रेषा ढ व ण एकमेकींना लंब आहेत. रेख कख व रेख खग च्या रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा काढा. त्यांना रेख कद व रेख दग ही नावे दया.

(१) रेषा ढ मधील रेख कग ची परावर्तन प्रतिमा कोणती?
(२) रेख कख, रेख खग व रेख कग यांच्या परावर्तन प्रतिमांमुळे कोणती भूमितीय आकृती तयार होते?
(३) △ कखग शी ती आकृती कोणत्या प्रकारे संबंधित आहे?
(४) △ कखग व (३) मध्ये मिळालेली प्रतिमा मिळून कोणती भूमितीय आकृती तयार होईल?
जर (क) रेख कख व रेख कग समान लांबीचे असतील तर ---
(ख) रेख कख व रेख कग समान लांबीचे नसतील तर ---
(५) (४) मध्ये तयार होणाऱ्या आकृतीत सममितींचे किती अक्ष असतील?
(६) या अक्षांची नावे सांगा.
(७) △ कखद व △गखद यांच्यामध्ये काय संबंध आढळतो?



आ. ८.२०

४. आ. ८.२० मध्ये रेख कख रेषा ढ ला छेदतो. क आणि ख च्या रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा काढा. समजा त्या अनुक्रमे द व ध आहेत.

(१) थ ची परावर्तन प्रतिमा कोणती?

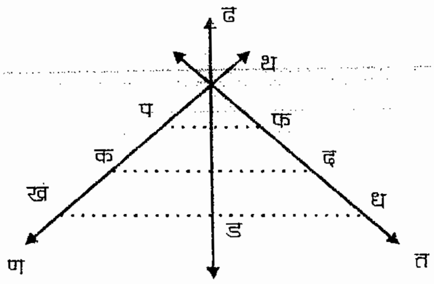
(२) जर रेख कख व त्याची परावर्तन प्रतिमा मिळून सममित आकृती तयार होत असेल तर तिचा सममितीचा अक्ष कोणता?

(३) रेख खध ची रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा कोणती?

(४) जर क-थ-ख असेल तर थ, द व ध यांच्यापैकी कोणता बिंदू इतर दोघांच्या दरम्यान आहे ते लिहा.

§ ८.९ रेषेचे रेषेमधील परावर्तन :

§ ८.८ मधील प्रश्नांपैकी प्रश्न क्र. ४ पाहा. जर त्यात रेख कख ला सामावणारी रेषा कख दिली असती तर तिची रेषा ढ मध्ये परावर्तन प्रतिमा काय आली असती असे तुम्हांस वाटते?



आ. ८.२१

आ. ८.२१ मध्ये रेषा ढ ही परावर्तन रेषा आहे. क व ख च्या रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा अनुक्रमे द व ध आहेत.

रेख कख ची परावर्तन प्रतिमा रेख दध आहे. आपण असा अंदाज अगदी चटकन करू शकतो की रेषा कख ची परावर्तन प्रतिमा रेषा दध असावी. आपला अंदाज पडताळून पाहण्यासाठी रेषा कख वर असलेला पण रेख कख वर नसलेला प हा कोणताही बिंदू घ्या. प ची रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा फ असेल तर फ बिंदू रेख दध वर नाही, पण रेषा दध वर आहे हे पडताळून पाहता येते. रेषा कख व तिची परावर्तन प्रतिमा मिळून होणाऱ्या आकृतीचे निरीक्षण करा. ती सममित आहे का? असल्यास तिचा सममितीचा अक्ष कोणता?

१. रेषेची रेषेमधील परावर्तन प्रतिमा ही रेषाच असते.

२. रेषा व तिची परावर्तन प्रतिमा मिळून जी सममित आकृती तयार होते तिच्या सममितीचा अक्ष म्हणजे परावर्तन रेषा असते.

आ. ८.२१ च्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

१. ∠खथड व ∠धथड यांच्यामध्ये काय संबंध आढळतो?

२. ∠खथध च्या संदर्भात किरण थड ला कोणते नाव आहे?

३. रेषा कख ची रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा निश्चित करण्यासाठी कमीत कमी किती बिंदू रेषा कख वर घ्यावेत?

४. आकृतीमध्ये रेषा कख उजवीकडे झुकलेली दिसत असून तिची प्रतिमा डावीकडे झुकल्यासारखी दिसते. जर रेषा कख ही डावीकडे झुकली असती तर तिची परावर्तन प्रतिमा कोणत्या बाजूकडे झुकलेली असती?

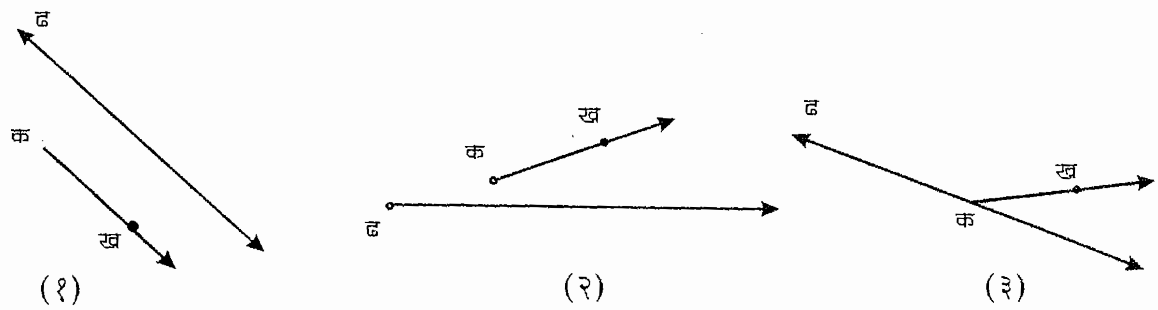
५. समजा रेषा कख ही, रेषा ढ ला समांतर आहे, तर तिच्या परावर्तन प्रतिमेबद्दल काय सांगता येईल?

६. जर रेषा कख ही रेषा ढ ला छेदत असेल तर तिची परावर्तन प्रतिमा रेषा ढ ला छेदेलच का?

७. जर रेषा कख ही रेषा ढ शी जुळत असेल तर तिची परावर्तन प्रतिमा कोणती मिळेल?

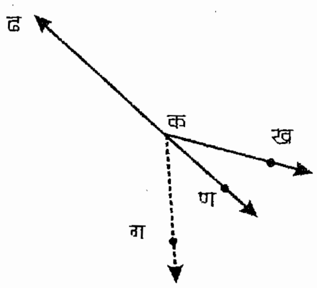
§ ८.१० किरणाची रेषेतील परावर्तन प्रतिमा :

आ. ८.२२ मध्ये रेषा ढ च्या संदर्भात किरण कख च्या तीन वेगवेगळ्या स्थिती दाखवल्या आहेत.



आ. ८.२२

क आणि ख बिंदूंच्या रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा काढून प्रत्येक बाबतीत किरण कख ची परावर्तन प्रतिमा पूर्ण करा. आता ८.२२ (३) चा विचार करा. तुम्ही पूर्ण केलेली आकृती खालीलप्रमाणे दिसत असेल.



आ. ८.२३

समजा परावर्तन किरण कग आहे.

∠खकण व ∠गकण यांच्या मापांतील संबंध शोधा.

कोनांतील हा संबंध तुम्हांला कोनमापकाच्या साह्याने शोधता येईल. तरीपण प्रत्यक्ष कोन न मोजता त्यांच्या मापातील संबंध शोधून काढण्याची एक पद्धती खाली दिली आहे.

क केंद्र समजून आणि कंपासमध्ये सोयीस्कर त्रिज्या घेऊन एक चाप असा मारा की तो किरण कख, किरण कण, किरण कग यांना अनुक्रमे द,ध व न या तीन बिंदूंत छेदेल.

d(द,ध) व d(न,ध) या दोन अंतरांची तुलना करा. ही अंतरे समान असतील तर ∠खकण व ∠गकण यांची मापे समान असतील. या रचनेचे समर्थन करण्यासाठी त्रिकोणाच्या एकरूपतेचा बा बा बा चा गुणधर्म वापरा.

असे आढळून येते की ∠खकण व ∠गकण यांची मापे समान आहेत. अशा वेळेस किरण कण हा व ∠खकग चा

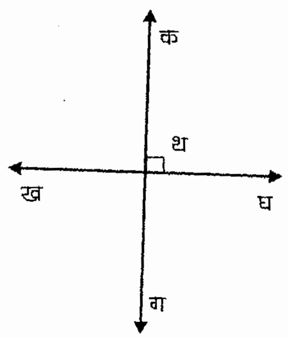
कोनदुभाजक होतो. हा कोन किरण कण भोवती सममित आहे हे आपणांस कागदाची घडी घालण्याच्या पद्धतीने पडताळता येते.

यावरून खालील निष्कर्ष सांगता येतो.

१. किरणाची रेषेतील परावर्तन प्रतिमा किरण असते.

२. एखादी रेषा जर कोनाच्या कोनदुभाजकाला सामावणारी असेल तर त्या कोनाची एक भुजा (किरण) ही दुसऱ्या भुजेची त्या रेषेतील परावर्तन प्रतिमा असते.

३. किरण व त्याची रेषेतील परावर्तन प्रतिमा मिळून जी आकृती तयार होते तिचा सममितीचा अक्ष म्हणजे दिलेली परावर्तन रेषा असते.



आ. ८.२४

आ. ८.२४ मध्ये रेषा कग व रेषा खघ परस्परांना ज मध्ये काटकोनात छेदतात.

रेषा खघ च्या, रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमेचा विचार करू या.

खालील तीन बाबी लक्षात येतात :

(१) किरण थख ची परावर्तन प्रतिमा किरण थघ आहे.

(२) किरण थघ ची परावर्तन प्रतिमा किरण थख आहे.

(३) थ ची परावर्तन प्रतिमा थ आहे.

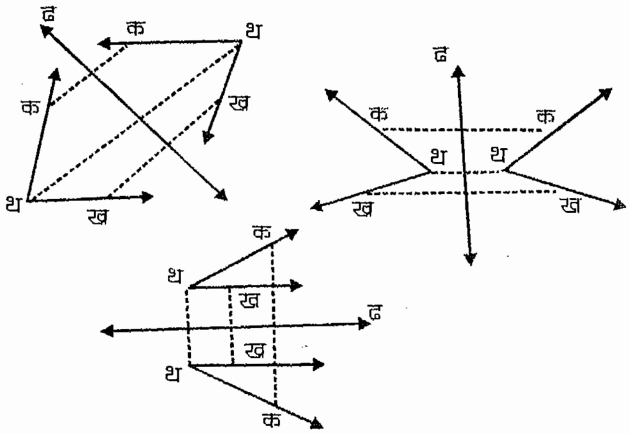
यावरून आपणांस म्हणता येते की, रेषा खघ ची रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमा रेषा खघ आहे, तसेच रेषा कग ची रेषा खघ मधील परावर्तन प्रतिमा रेषा कग आहे.

निष्कर्ष :

परावर्तन रेषेस लंब असणाऱ्या रेषेची परावर्तन प्रतिमा स्वतः ती रेषा असते.

§ ८.११ कोनाचे रेषेतील परावर्तन :

पुढील आ. ८.२५ मध्ये कोनांचे रेषेमधील परावर्तन कसे होते याचे चित्रण केले आहे.



आ. ८.२५

या आकृतीच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

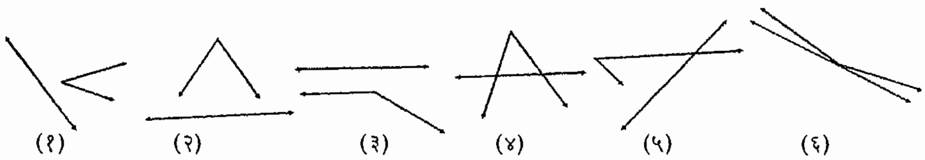
१. कोनाची रेषेतील परावर्तन प्रतिमा म्हणजे कोणत्या प्रकारची भूमितीय आकृती राहील?

२. कोन व त्याची परावर्तन प्रतिमा यांच्या मापांत तुम्हांला कोणता संबंध आढळतो?

कोनाची रेषेमधील परावर्तन प्रतिमा एकरूप कोन असते. कोन व त्याची परावर्तन प्रतिमा यांनी मिळून बनलेली आकृती परावर्तन रेषेभोवती सममित असते.

§ ८.१२ प्रश्न :

१. खाली आकृती ८.२६ मध्ये कोनाच्या काही आकृत्या दिल्या आहेत. त्या कोनांच्या दिलेल्या परावर्तन रेषेमधील परावर्तन प्रतिमा काढा.



आ. ८.२६

२. आ. ८.२७ मध्ये ख व ग च्या रेषा कघ मधील परावर्तन प्रतिमा अनुक्रमे ख व ग आहेत. तर खालील कोनांच्या रेषा कघ मधील परावर्तन प्रतिमा सांगा.

∠कथख, ∠गथघ, ∠खथग, ∠खथघ व ∠गथक.

§ ८.१३ सममिती व परावर्तन :

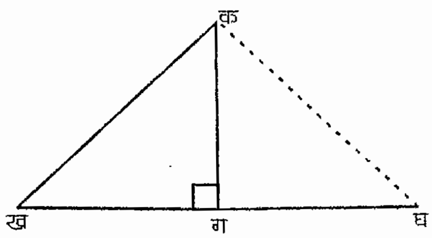
परावर्तनासंबंधीच्या आतापर्यंतच्या आपल्या चर्चेत आपण जी विधाने केली आहेत त्यांपैकी दोन विधाने खाली पुन्हा दिली आहेत.

१. रेषाखंड व त्याची परावर्तन प्रतिमा मिळून एक सममित आकृती तयार होते. परावर्तन रेषा ही या आकृतीच्या सममितीचा अक्ष असते.

२. कोन व त्याची मिळून बनलेली आकृती परावर्तन रेषेभोवती सममित असते.

आकृतीच्या परावर्तनासंबंधीची ही विधाने परावर्तन व सममिती यांच्यामधील निकटचा संबंध प्रस्थापित करतात. भूमितीय आकृत्यांचे अनेक रंजक गुणधर्म सममिती व परावर्तनाच्या साहयाने प्रस्थापित करता येतात. त्यांपैकी काही गुणधर्म नमुन्यादाखल आपण इथे पाहणार आहोत. त्यापूर्वी सममिती व परावर्तन यांच्यासंबंधी खालील विधान करू या.

कोणताही बिंदुसंच व बिंदुसंचाची रेषेतील परावर्तन प्रतिमा मिळून होणारी आकृती सममित असते आणि परावर्तन रेषा ही त्या आकृतीच्या सममितीचा अक्ष असते.



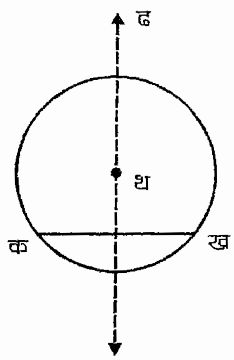
आ. ८.२८

१. आ. ८.२८ मध्ये △ कघग ही काटकोन त्रिकोण कखग ची रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमा आहे.

त्यामुळे रेख कख व रेख कघ एकरूप आहेत. म्हणून △ कखघ हा समद्विभुज त्रिकोण होतो. रेख गख ची परावर्तन प्रतिमा रेख गघ असल्यामुळे रेषा कग ही रेख खघ ची लंबदुभाजक रेषा होते.

निष्कर्ष :

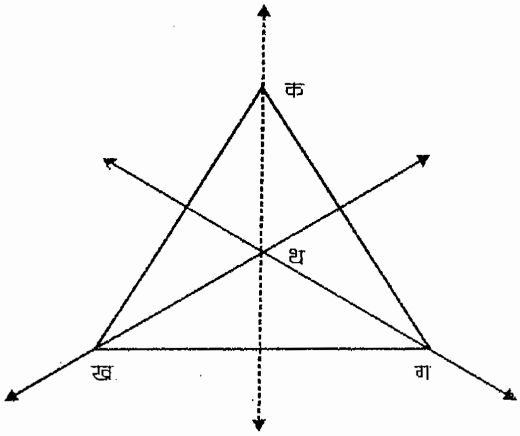
समद्विभुज त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून पायावर काढलेला लंब पायास दुभागतो.



आ. ८.२९

२. आ. ८.२९ मध्ये एक वर्तुळ दाखवले असून त्याचा केंद्र थ आहे. हे वर्तुळ केंद्रातून जाणाऱ्या ढ रेषेभोवती सममित आहे. समजा वर्तुळावरील क बिंदूची, रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा ख आहे. ख हा बिंदू वर्तुळावर आहे हे पडताळून पाहा. म्हणून रेषा ढ ही रेख कख ची लंबदुभाजक आहे. रेख कख ही तर वर्तुळाची जीवा आहे. म्हणून

वर्तुळाच्या केंद्रातून जाणारी व जीवेला लंब असणारी रेषा जीवेला दुभागते.



आ. ८.३०

३. आ. ८.३० मध्ये रेषा खथ व रेषा गथ हे समभुज त्रिकोण कखग च्या सममितीचे अक्ष आहेत. रेषा कथ काढा. आता खालील विधाने काळजीपूर्वक अभ्यासा.

१. क ही ख ची रेषा गथ मधील परावर्तन प्रतिमा आहे.

२. क ही ग ची रेषा खथ मधील परावर्तन प्रतिमा आहे.

३. म्हणून ख ही ग ची रेषा कथ मधील परावर्तन प्रतिमा आहे.

४. म्हणजे रेषा कथ हा $\triangle$ कखग चा सममितीचा अक्ष आहे.

निष्कर्ष :

समभुज त्रिकोणात, तीन सममितीचे अक्ष एकसंपाती असतात. म्हणजेच ते एकाच बिंदूतून जातात.

आता खालील उदाहरणे वाचा व त्यांची सत्यता पडताळून पाहा.

समभुज त्रिकोणात :

(१) कोनांचे दुभाजक एकसंपाती असतात.

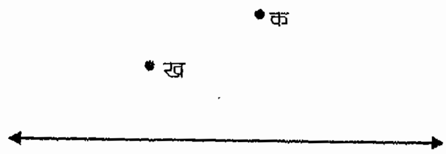
(२) शिरोबिंदूपासून पायावर काढलेले लंब एकसंपाती असतात.

(३) बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात.

(४) मध्यगा एकसंपाती असतात.

असे दिसून येते की, वरील सर्व विधाने खरी आहेत. कारण समभुज त्रिकोणाच्या बाबतीत शिरोलंब, कोनदुभाजक, बाजूंचे लंबदुभाजक व मध्यगा या सर्व सममितीचे अक्ष होतात व म्हणून एकसंपाती असतात. या विधानांचा पडताळा एका कागदाच्या तुकड्यातून समभुज त्रिकोण कापून त्याच्या घड्या घालून पाहता येईल.

स्वाध्याय



आ. ८.३१

१. समजा रेषा ढ ही परावर्तन रेषा आहे. क आणि ख हे दोन बिंदू रेषा ढ च्या एकाच बाजूला आहेत (आ. ८.३१ पाहा.) समजा क′ व ख′ ह्या क अणि ख च्या रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा आहेत. तर

(१) रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा काढा. (क) ख′ (ख) रेषा कक′ (ग) रेषा कख (घ) रेषा क′ख (च) रेषा कख′ (छ) रेषा क′ख′ (ज) रेषा खख′

(२) रेषा कख व रेषा क′ख′ बिंदू द मध्ये छेदत असतील तर द ची रेषा ढ मधील परावर्तन प्रतिमा कोणती?

(३) जर रेषा कख′ व रेषा क′ख ह्या ध मध्ये छेदत असतील तर ध ची रेषा ढ मध्ये परावर्तन प्रतिमा कोणती?

(४) d(क,द) हे d(क′,द) पेक्षा मोठे असेल का?

(५) d(ख,ध) हे d(ख′,ध) पेक्षा लहान असेल का?

(६) रेषा कक′ व रेषा ढ यांमध्ये काय संबंध आढळतो?

(७) रेषा ढ व ∠खधख′ यांमध्ये काय संबंध आढळतो?

२. उदा. १ मधील आ. ८.३१ चा आधार घ्या व उत्तरे दया.

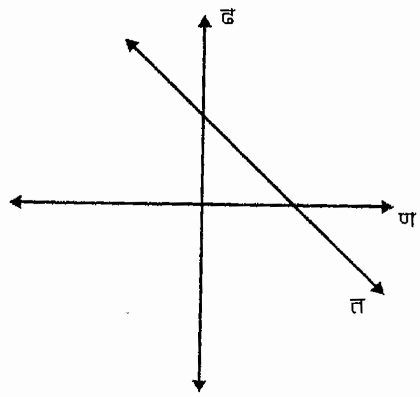
(१) जर रेषा कख, रेषा ढ शी ६० मापाचा कोन करीत असेल तर रेषा क′ख′, रेषा ढ शी किती मापाचा कोन करील?

(२) □ कखख′क′ हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे?

(३) चौकोन कखख′क′ हा कोणत्या अक्षाभोवती सममित आहे?

(४) त्याच्या कर्णाच्या छेदनबिंदूंची परावर्तन प्रतिमा कोठे मिळते?

(५) जर रेख कख व रेख क′ख′ एकरेषीय असतील तर या रेषाखंडांना सामावणारी रेषा ढ रेषेशी किती मापाचा कोन करील?



आ. ८.३२

३. आ. ८.३२ मध्ये रेषा ढ व रेषा ण एकमेकींना लंब असून रेषा त त्यांना भिन्न बिंदूत छेदते.

रेषा त च्या रेषा ढ व रेषा ण मधील परावर्तन प्रतिमा काढा. या प्रतिमांना रेषा य व रेषा र अशी नावे अनुक्रमे दया. रेषा य व रेषा र यांमध्ये तुम्हांला काही संबंध दिसतो का? तो संबंध सांगा.

४. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?

(१) रेषेची परावर्तन प्रतिमा परावर्तन रेषेला नेहमी छेदते.

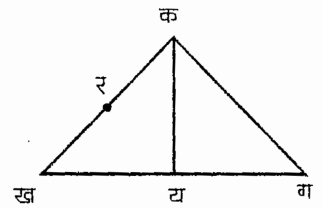
(२) रेषा व तिची परावर्तन प्रतिमा या दोन्ही परावर्तन रेषेवर छेदतात.

(३) रेषा व तिची परावर्तन प्रतिमा एकतर समांतर असतात किंवा परस्परांना छेदतात.

(४) परावर्तन रेषेशी तंतोतंत जुळणाऱ्या किरणाची परावर्तन प्रतिमा ती परावर्तन रेषाच असते.

(५) जर रेषा व तिची परावर्तन प्रतिमा छेदत असतील तर त्या परावर्तन रेषेवर छेदतात.

५. आ. ८.३३ मध्ये त्रिकोण कखग हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. रेषा कय ही गख ला लंब आहे. र हा रेख कख वर आहे.



आ. ८.३३

(१) ग ची रेषा कय मधील परावर्तन प्रतिमा कोणती?

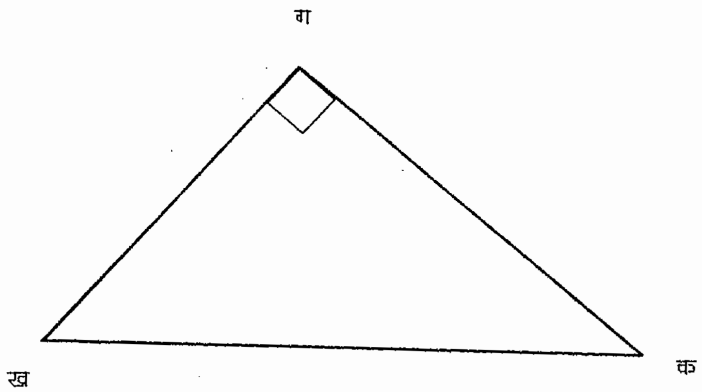
(२) रेख कख ची रेषा कय मध्ये परावर्तन प्रतिमा कोणती?

(३) △ कगख हा कोणत्या अक्षाभोवती सममित आहे?

(४) समजा र ची, रेषा कय मधील परावर्तन प्रतिमा ल आहे. तर रेख खल व रेख गर यांचा छेदनबिंदू कोणत्या रेषेवर असेल?

(५) जर रेषा खक ही रेषा कग ला लंब असेल तर रेषा कर व रेषा खल यांच्या बद्दल काय सांगता येईल?

(६) त्रिकोण कगख हा काटकोन त्रिकोण आहे.



आ. ८.३४

(१) त्रिकोण कखग ची रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमा काढा.

(२) त्रिकोण कखग ची रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमा काढल्यास, ज्याच्या सममितीचा अक्ष रेषा कग आहे अशी कोणत्या प्रकारची आकृती मिळते?

(३) खालील आकृत्या म्हणजे कोणत्या सममित आकृत्या आहेत?

(क) त्रिकोण कखग व त्याची रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमा.

(ख) त्रिकोण कखग व त्याची रेषा कख मधील परावर्तन प्रतिमा.

(४) ख बिंदूची रेषा कग मधील परावर्तन प्रतिमा ख' आहे असे समजा. तर त्रिकोण ख'खग हा कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असेल?

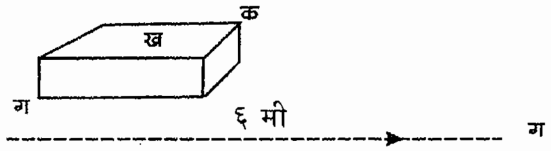
प्रकरण ९

स्थलांतर, भ्रमण आणि प्रक्षेपण

§ **९.१** (१) दिलेल्या ढ रेषेला दिलेल्या द बिंदूतून समांतर रेषा काढण्याची कृती आठवा. ही रचना तुम्ही भौमितिक रचना या प्रकरणात शिकलात. तेथे तुम्ही ही रचना कशी केली? गुण्याची एक कडा तुम्ही रेषेशी जुळवून ठेवली आणि नंतर गुण्याची दिशा कायम ठेवून तो त्या दिलेल्या बिंदूकडे सरकविला. या नवीन स्थितीत असलेली गुण्याची कडा दिलेल्या रेषेला समांतर असलेल्या रेषेचे दिग्दर्शन करते. या नवीन स्थितीत गुण्याच्या कडेशी काढलेली रेषा ण ही आपल्याला हवी असलेली समांतर रेषा राहील.

आता आपण या रचनेकडे जरा वेगळ्या दृष्टिकोणातून पाहू. इथे आपण म्हणू की, दिलेल्या रेषेचे दिलेल्या अंतरातून, दिलेल्या दिशेने स्थानांतर झाले आहे. दुसऱ्या शब्दांत, दिलेल्या ढ रेषेला दिलेल्या, अंतरावर, दिलेल्या दिशेने एक रेषा ण आपण निगडित केली.

(२) आ. ९.१ मध्ये एक डबी बाणाच्या दिशेने एका सरळ रेषेत ६ मीटर अंतरापर्यंत सरकवली आहे.



आ. ९.१

डबीच्या क,ख,ग या बिंदूंची स्थिती स्थानांतरानंतर अनुक्रमे क′,ख′,ग′ आहे असे समजा.

(१) कोपरा क किती अंतर सरकला?

(२) प्रत्येक कोपरा किती अंतर सरकला?

(३) सर्व कोपरे किती अंतर सरकले?

(४) क ची स्थानांतरानंतरची स्थिती कोणती?

(३) आ. ९.२ मध्ये क चे पूर्वेकडे ५ सेमी. स्थानांतर होऊन क′ हा बिंदू मिळाला.

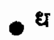


आ. ९.२

या ठिकाणी आपण क पासून पूर्वेकडील ५ सेमी. अंतरावर असलेला क′ बिंदूशी क बिंदू निगडित केला.

वरील तीन उदाहरणांत आपण काही भूमितीय आकृत्यांची (बिंदू, रेषा) दुसऱ्या भूमितीय आकृत्यांशी संगती दाखवली. या संगतीला **रूपांतरण** (Transformation) म्हणतात. रूपांतरण हे विविध प्रकारचे असते. वरील उदाहरणांत दाखवलेल्या रूपांतरणाला **स्थलांतर** (Translation) असे म्हणतात. एखादया भूमितीय आकृतीचे स्थलांतर होऊन जी दुसरी भूमितीय आकृती मिळते, तिला त्या मूळ आकृतीची स्थलांतर प्रतिमा (Translation image) म्हणतात.

आता खाली दिलेल्या द बिंदूच्या, दिलेल्या अटीनुसार स्थलांतर प्रतिमा काढा व त्यांना सांगितल्याप्रमाणे नावे दया.



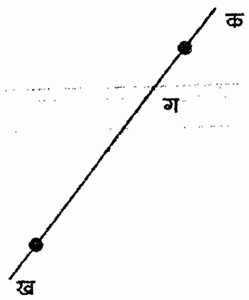
आ. ९.३

अंतर २ सेमी.
दिशा-पूर्व
(२) स्थलांतर प्रतिमा न
अंतर ४ सेमी.
दिशा-दक्षिण.
(३) स्थलांतर प्रतिमा प
अंतर २.५ सेमी.
दिशा-वायव्य.

कोणत्याही भूमितीय आकृतीची स्थलांतर प्रतिमा मिळविण्यासाठी आपल्याला दोन बाबी माहीत असाव्या लागतात.
१. स्थलांतराची दिशा. २. ज्या अंतरातून स्थलांतर होते ते अंतर.

§ ९.२ रेषाखंडाचे स्थलांतर :

बिंदूचे स्थलांतर होते म्हणजे नेमके काय होते व बिंदूची स्थलांतर प्रतिमा कशी काढायची हे माहीत झाल्यामुळे आता रेषाखंडाच्या स्थलांतराचा अभ्यास करणे आपल्याला सुलभ जाईल. रेषाखंड हा बिंदूंचा संच आहे. त्यामुळे रेषाखंडातील सर्व बिंदूंचे स्थलांतर करून आपल्याला रेषाखंडाची स्थलांतर प्रतिमा काढता येईल. परंतु एखादया रेषाखंडाची स्थलांतर प्रतिमा काढण्यासाठी त्यावरील सर्व बिंदूंचे स्थलांतर करून पाहण्याची आवश्यकता आहे का?



आ. ९.४

आ. ९.४ मध्ये रेख कख दाखवला असून त्यावर ग हा एक बिंदू आहे. क', ख' व ग' चे पूर्वेकडे ३ सेमी. अंतरावर स्थलांतर करा. समजा, स्थलांतर प्रतिमा अनुक्रमे क,ख व ग आहेत. आता खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

१. क' व ख' यांना जोडणाऱ्या रेषेवर ग' बिंदू आहे का?
२. ग' हा बिंदू क' व ख' यांच्या दरम्यान आहे का?
३. क',ख' व ग' या स्थलांतर प्रतिमा जोडून येणारी आकृती म्हणजे कोणती भूमितीय आकृती आहे?
४. या आकृतीला आपण रेख कख ची स्थलांतर प्रतिमा म्हणू या. ही स्थलांतर प्रतिमा म्हणजे एक रेषाखंडच आहे का?
५. स्थलांतरामध्ये बिंदूमधील दरम्यानता संबंध राखला जातो का?
६. रेख कख व तिची स्थलांतर प्रतिमा यांच्या लांबींची तुलना करा.
७. चौकोन कखख'क हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे?

१. रेषाखंडाची स्थलांतर प्रतिमा ही रेषाखंडच असते.
२. ही स्थलांतर प्रतिमा मूळ रेषाखंडाशी समांतर असते.

३. रेषाखंडाच्या स्थलांतर प्रतिमेची लांबी मूळ रेषाखंडाइतकी असते.

४. मूळ रेषाखंडातील बिंदूंत जो दरम्यानता संबंध असतो तोच संबंध त्यांच्या स्थलांतर प्रतिमांमध्ये असतो, म्हणजेच, जर क-ग-ख तर क'-ग'-ख'.

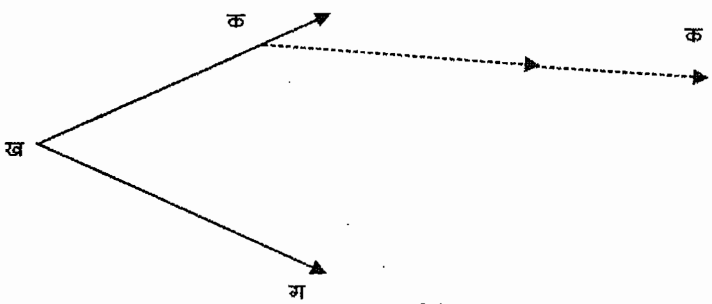
§ ९.३ रेषेचे व किरणाचे स्थलांतर :

रेषाखंडाच्या स्थलांतराबद्दल जे विधान वर केले आहे तशाच प्रकारचे विधान रेषा व किरण यांच्या स्थलांतराबद्दलही करता येईल.

१. रेषेची स्थलांतर प्रतिमा ही रेषाच असते व ती मूळ रेषेशी समांतर असते.

२. किरणाची प्रतिमा किरण असून तो मूळ किरणाला समांतर असतो.

§ ९.४ कोनाचे स्थलांतर :



आ. ९.५

कोनाची स्थलांतर प्रतिमा काढण्याची पद्धती आ. ९.५ मध्ये सुचवली आहे. आकृतीत क ची स्थलांतर प्रतिमा क' आहे. ख व ग बिंदूंच्या प्रतिमा त्याच दिशेने व तितक्याच अंतरावर काढा. त्यांना ख' व ग' ही नावे दया. प्रतिमेची आकृती पूर्ण करा. असे दिसून येते की, ∠कखग ची स्थलांतर प्रतिमा ∠क'ख'ग' आहे.

∠कखग व ∠क'ख'ग' यांच्या मापांतील संबंध पडताळून पाहा. ही मापे समान आहेत असे दिसते. म्हणून,

कोनाची स्थलांतर प्रतिमा म्हणजे त्याला एकरूप असलेला कोन होय.

§ ९.५ त्रिकोणाचे व इतर आकृत्यांचे स्थलांतर :

त्रिकोणाच्या व इतर भूमितीय आकृत्यांच्या स्थलांतर प्रतिमांसंबंधी तुमचे अंदाज पाहण्यासाठी पुढील प्रश्न विचारले आहेत. त्यांची उत्तरे दया.

१. त्रिकोणाची स्थलांतर प्रतिमा म्हणजे कोणती भूमितीय आकृती असेल?

२. ही आकृती मूळ त्रिकोणाशी एकरूप असेल का?

३. ही जर एकरूप असेल तर ती तशी का असावी?

४. वर्तुळाची स्थलांतर प्रतिमा म्हणजे कोणती भूमितीय आकृती येईल?

५. वर्तुळाची स्थलांतर प्रतिमा वर्तुळच असेल तर मूळ वर्तुळाची त्रिज्या आणि प्रतिमा वर्तुळाची त्रिज्या यांच्यात काय संबंध असेल?

६. समभुज त्रिकोणाची स्थलांतर प्रतिमा म्हणजे कोणती भूमितीय आकृती येईल? समद्विभुज त्रिकोणाची स्थलांतर प्रतिमा?

७. कोणत्या भूमितीय आकृतीची स्थलांतर प्रतिमा म्हणजे दोन समांतर रेषा असतील? दोन लंब रेषा असतील?

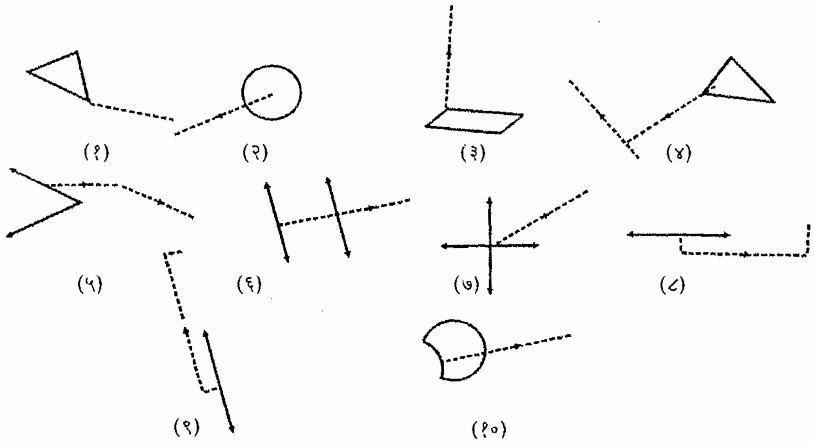
लक्षात ठेवा की,

कोणत्याही भूमितीय आकृतीची स्थलांतर प्रतिमा ही तशीच आकृती असते व ती मूळ आकृतीशी एकरूप असते.

§ ९.५ प्रश्न :

१. पुढे दिलेल्या आकृत्यांच्या स्थलांतर प्रतिमा काढून आकृत्या पूर्ण करा. प्रत्येक आकृतीत सोयीसाठी क बिंदू व त्याची दिलेल्या दिशेने दिलेल्या अंतरावर क' ही स्थलांतर प्रतिमा दिली आहे.

प्रत्येक आकृतीकरता कमीत कमी तीन बिंदू घ्या व समांतर रेषा काढण्यासाठी त्रिकोणी गुण्या व मोजपट्टी वापरा.



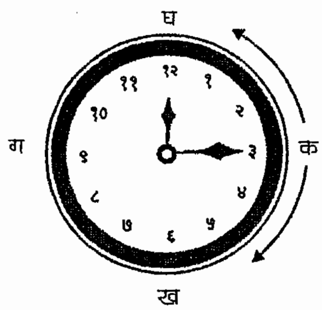
आ. ९.६

§ ९.६ तुम्ही वर सोडविलेल्या उदाहरणांपैकी उदा. १(८) व (९) या आकृत्यांचे बारकाईने निरीक्षण करा. या आकृत्यांमध्ये दिलेल्या रेषेची दिशा व स्थलांतराची दिशा एकच आहे. अशा परिस्थितीत दिलेल्या रेषेची स्थलांतर प्रतिमा कोणती येते? अर्थातच दिलेल्या रेषेची त्याच दिशेने स्थलांतर प्रतिमा तीच रेषा होईल.

स्थलांतराच्या दिशेने असलेल्या प्रत्येक रेषेची स्थलांतर प्रतिमा तीच रेषा असते.

§ ९.७ भ्रमण :

आतापर्यंत आपण परावर्तन व स्थलांतर प्रतिमांचा अभ्यास केला. आता **प्रतलातील** आणखी एक रूपांतरणाचा विचार करू.



आ. ९.७

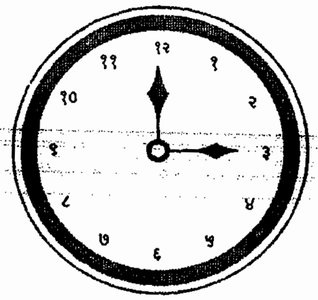
भिंतीवरच्या घड्याळाचेच उदाहरण घ्या. आ. ९.७ मध्ये असे एक घड्याळ दाखवले आहे. या घड्याळाच्या मिनिट काट्याचे एक टोक, थ बिंदूच्या ठिकाणी स्थिर असून दुसरे टोक क बिंदूभोवती फिरते. या दुसऱ्या टोकाचे थ पासूनचे अंतर कायम राहते. आता समजा, या मिनिटकाट्याचे दुसरे टोक ३ वर आहे. आणखी १५ मिनिटानंतर ते ६ वर येईल. म्हणजेच ख बिंदूवर येईल. काट्याच्या त्या टोकाची पूर्वीची स्थिती क बिंदूने दाखवल्यास आपण असे म्हणू या की, क बिंदू थ भोवती ९०

मापाच्या कोनातून फिरविल्यास त्याची नंतरची स्थिती थ पासून तितक्याच अंतरावर असलेल्या ख बिंदूने दाखविता आली. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे म्हणजे क बिंदूशी निगडित असलेला ख हा असा बिंदू आपल्याला मिळाला की त्याचे थ पासूनचे अंतर हे क च्या थ पासूनच्या अंतराइतकेच असून m∠कथख = ९० आहे.

दोन बिंदूंमधील हा असा संबंध म्हणजे एका भूमितीय आकृतीचे दुसऱ्या भूमितीय आकृतीमध्ये रूपांतरणच होय. अशा प्रकारच्या रूपांतरणाला **भ्रमण** (Rotation) म्हणतात. भ्रमणानंतर मिळणाऱ्या भूमितीय आकृतीला मूळ आकृतीची **भ्रमण प्रतिमा** म्हणतात. वरील उदाहरणात ख बिंदू ही क बिंदूची भ्रमण प्रतिमा होय. मूळ आकृती ज्या बिंदूभोवती भ्रमण करते त्या बिंदूला **भ्रमणकेंद्र** म्हणतात. इथे थ बिंदू हा भ्रमणकेंद्र होईल. या उदाहरणात क बिंदूचे ख बिंदूच्या दिशेने भ्रमण झालेले दाखवले आहे. अशा वेळेस भ्रमण 'घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने' (clockwise) झाले आहे असे आपण म्हणतो. जर क बिंदूचे भ्रमण घ च्या दिशेने झाले असते तर ते 'घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने' झाले (anti-clockwise) असे आपण म्हटले असते.

आपण परावर्तन व स्थलांतर या रूपांतरणात मूळ भूमितीय आकृत्यांशी नवीन भूमितीय आकृत्या (बिंदूंचा संच) निगडित करीत आलो. हे लक्षात घ्या की, भ्रमणातही आपण तेच करीत असतो. आपण कागदावर वर्तुळ काढतो म्हणजे खरोखर काय करीत असतो? खरे म्हणजे आपण त्यावेळी दिलेल्या बिंदूंच्या, एका स्थिर बिंदूभोवती भ्रमण प्रतिमा काढीत असतो.

§ ९.८ आ. ९.८ मध्ये दाखवलेल्या आकृतीच्या आधारे खालील तक्त्यातील रिकाम्या जागा भरा.



आ. ९.८

	काट्याचे भ्रमण दिलेला बिंदू	प्रतिमा	भ्रमणाची दिशा	भ्रमणाच्या कोनाचे माप
१.	I	-----	घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने	६०
२.	XII	-----	--,,--	१२०
३.	V	VIII	----	--
४.	VI	I	घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने	--
५.	--	VIII	--,,--	९०

वरील तक्ता भरताना एक गोष्ट तुमच्या लक्षात आली असेल, ती म्हणजे एखादया बिंदूची दिलेल्या बिंदूभोवती भ्रमण प्रतिमा काढताना एकूण चार गोष्टी माहीत असाव्या लागतात.

१. भ्रमण केंद्र

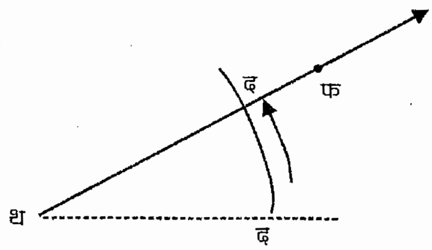
२. भ्रमण करणाऱ्या बिंदूचे भ्रमणकेंद्रापासून अंतर.

३. भ्रमण जितक्या कोनातून झाले त्या कोनाचे माप.

४. भ्रमणाची दिशा.

दिलेल्या बिंदूची भ्रमण प्रतिमा काढणे :

समजा थ हा भ्रमणकेंद्र असून त्याच्यापासून ४ सेमी. अंतरावर असलेल्या द बिंदूची भ्रमण प्रतिमा काढावयाची आहे. भ्रमणाची दिशा घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने असून भ्रमण ज्या कोनातून होते आहे त्याचे माप ३० आहे असे समजा. खाली दिलेल्या सूचनांप्रमाणे कृती करा व द ची भ्रमण प्रतिमा मिळवा.



आ. ९.९

१. थद जोडा.

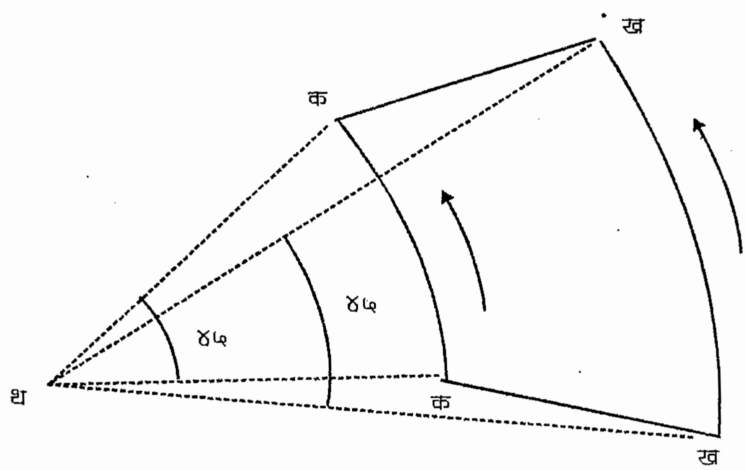
२. रेख थद शी ३० मापाचा कोन निश्चित करणारा किरण थफ काढा.

३. थ केंद्र घेऊन ४ सेमी. त्रिज्येने, किरण थफ ला द' मध्ये छेदणारा एक चाप मारा.

द' ही द ची इष्ट भ्रमण प्रतिमा होईल.

§ ९.९ रेषाखंडाचे, कोनाचे व त्रिकोणाचे बिंदूभोवती भ्रमण :

समजा, आपल्याला थ या भ्रमणकेंद्राभोवती रेख कख चे ४५ मापाच्या कोनातून भ्रमण केल्यावर मिळणारी भ्रमण प्रतिमा काढावयाची आहे. भ्रमणाची दिशा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने आहे असे समजा.



आ. ९.१०

१. क आणि ख च्या थ भोवतीच्या भ्रमण प्रतिमा अनुक्रमे क' आणि ख' काढा.

२. क', ख' जोडा.

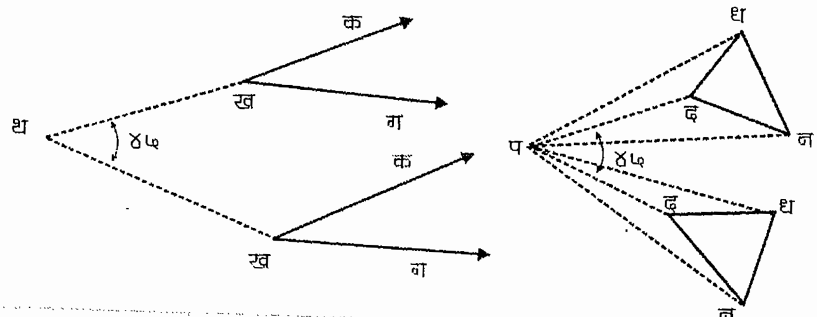
रेख क'ख' ही रेख कख ची भ्रमण प्रतिमा आहे.

रेख कख व रेख क'ख' एकरूप आहेत हे पडताळून पाहा.

रेषाखंडाची बिंदूभोवतीची भ्रमण प्रतिमा ही रेषाखंड असून तो मूळ रेषाखंडाशी एकरूप असतो.

दिलेल्या बिंदूचे भ्रमणकेंद्राभोवती दिलेल्या कोनातून भ्रमण करून भ्रमण प्रतिमा कशी काढायची हे एकदा माहीत झाले की कोणत्याही भूमितीय आकृतीची भ्रमण प्रतिमा काढता येते.

आ. ९.११ मध्ये ∠ कखग व त्रिकोण दधन चे अनुक्रमे थ व प भोवती घड्याळाच्य



आ. ९.११

काट्यांच्या विरुद्ध दिशेने ४५ मापाच्या कोनातून भ्रमण करून मिळणाऱ्या अनुक्रमे ∠ क'ख'ग' व ∠ द'ध'न' ह्या भ्रमण प्रतिमा दाखवल्या आहेत.

वरील आकृती व तिची प्रतिमा यांची तुलना करा.

निष्कर्ष :

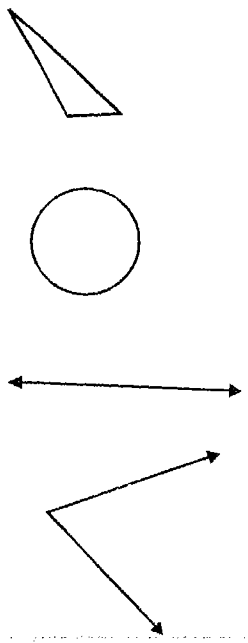
१. कोनाची बिंदूभोवतीची भ्रमण प्रतिमा एकरूप कोन असते.

२. त्रिकोणाची बिंदूभोवतीची भ्रमण प्रतिमा ही एकरूप त्रिकोण असते.

§ ९.१० आतापर्यंत आपण तीन प्रकारच्या रूपांतरणांचा अभ्यास केला. परावर्तन, स्थलांतर व भ्रमण ही ती तीन रूपांतरणे होत. या तीनही रूपांतरणांत सामान्य असलेला एखादा गुणधर्म आपल्या नजरेस आला का? ध्यानात घ्या की या तीनही रूपांतरणांत रेषाखंडाची लांबी, कोनाचे माप व दरम्यानतेचा गुणधर्म कायम राहतो, बदलत नाही. याचाच अर्थ परावर्तन, स्थलांतर व भ्रमण या तीनही रूपांतरणांत दोन बिंदूंमधील अंतर कायम राहते. हा या तीनही रूपांतरणांचा एक विशेष गुणधर्म आहे. मात्र परावर्तनात प्रतिमेमध्ये बाजूंची उलटापालट होते तसे स्थलांतर व भ्रमण यांत मात्र होत नाही.

§ ९.११ प्रश्न :

१. खालील आकृत्यांच्या, बाजूला दिलेल्या सूचनांनुसार स्थलांतर प्रतिमा काढा.



(क) (१) पूर्वेकडे २ सेमी.
(२) नंतर दक्षिणेकडे १ सेमी.

(ख) (१) पश्चिमेकडे २ सेमी.
(२) दक्षिणेकडे ३ सेमी.

(ग) (१) पूर्वेकडे २ सेमी.
(२) उत्तरेकडे २ सेमी.

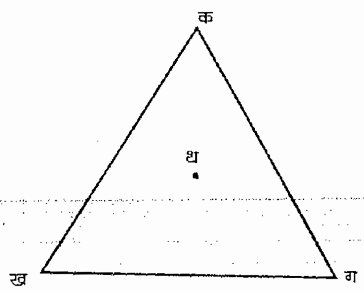
(घ) (१) पूर्वेकडे ४ सेमी.
(२) आग्नेयेकडे ४ सेमी.

आ. ९.१२

२. खाली दिलेल्या माहितीवरून बिंदूची भ्रमण प्रतिमा काढा.

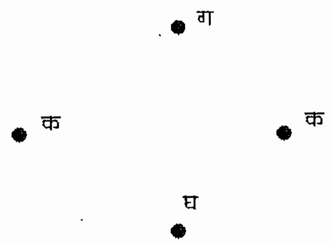
भ्रमण केंद्रापासून बिंदूचे स्थान	अंतर	भ्रमण कोन	दिशा
१. पूर्व	५ सेमी.	१२०	घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने
२. पश्चिम	६ सेमी.	६०	घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने
३. उत्तर	२.५ सेमी.	३०	घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने
४. दक्षिण	४ सेमी.	९०	घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने
५. आग्नेय	३ सेमी.	१५०	घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने

३. Δ कखग हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. हा त्रिकोण क भोवती ९० मापाच्या कोनातून घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने फिरवल्यास होणारी भ्रमण प्रतिमा काढा.



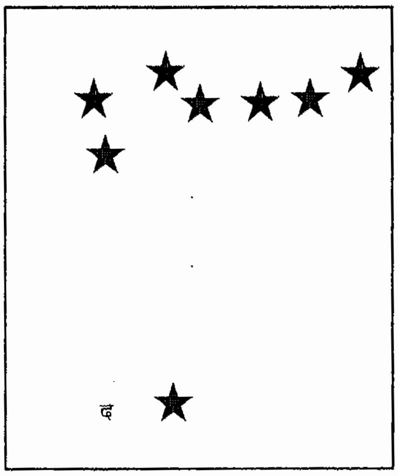
आ. ९.१३

४. Δ कखग हा समभुज त्रिकोण आहे. हा त्रिकोण त्रिकोणाच्या थ या केंद्रबिंदूभोवती किती मापाच्या कोनातून फिरवावा म्हणजे क↔ख, ख↔ग व ग↔क होईल?



आ. ९.१४

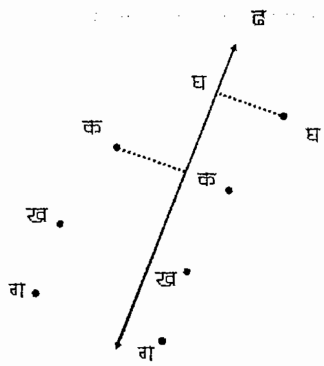
५. क' ही क ची ग किंवा घ भोवतीची भ्रमण प्रतिमा आहे. जर भ्रमणाची दिशा घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने असेल तर ग व घ पैकी कोणता भ्रमणकेंद्र असावा?



आ. ९.१५

६. आ. ९.१५ मध्ये ध्रुवताऱ्याभोवती फिरणाऱ्या सप्तर्षींचा आराखडा दाखवला आहे. हे सप्तर्षी ध्रुवताऱ्याभोवती घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने ९० मापाच्या कोनातून फिरल्यास त्यांची भ्रमण प्रतिमा काढा.

§ ९.१२ प्रक्षेपण :



आ. ९.१६

आ. ९.१६ मध्ये रेषा ढ ही दिलेली रेषा असून क, ख, ग, घ हे दिलेले बिंदू आहेत. क पासून रेषा ढ वर लंब टाका. तो लंब ढ रेषेला क' मध्ये छेदू दया. अशा वेळेस क' ही क ची ढ रेषेवरील प्रक्षेपण प्रतिमा आहे असे म्हणतात. यावरून हे लक्षात येते की, बिंदूची रेषेवरील प्रक्षेपण प्रतिमा एक बिंदूच असते. घ पासून रेषा ढ वर काढलेला लंब ढ रेषेला घ' मध्ये छेदतो. म्हणून घ' ही घ ची ढ रेषेवरील प्रक्षेपण प्रतिमा आहे.

तुम्ही आता ख व ग बिंदूंचे ढ रेषेवरील प्रक्षेपण कसे काढाल?

दिलेल्या बिंदूची दिलेल्या रेषेवरील प्रक्षेपण प्रतिमा म्हणजे त्या बिंदूतून त्या रेषेवर टाकलेल्या लंबाचा पाद होय.

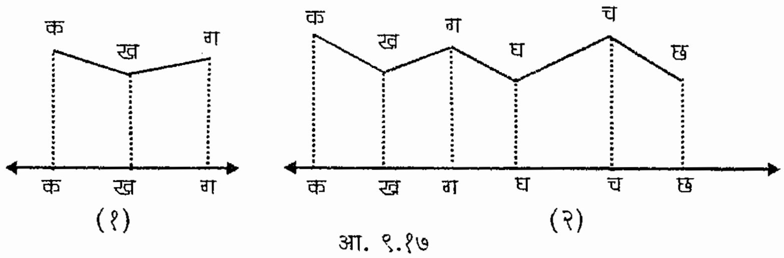
§ ९.१३ रेषाखंडाचे रेषेवरील प्रक्षेपण :

आ. ९.१७ मध्ये रेख कख दिलेला असून त्याची दिलेल्या ढ रेषेवरील प्रक्षेपण प्रतिमा काढावयाची आहे. क आणि ख पासून रेख ढ वर लंब टाका.

समजा, क व ख यांच्या रेषा ढ वरील प्रक्षेपण प्रतिमा अनुक्रमे क' व ख' आहेत. अशा वेळेस रेख क'ख' ला रेख कख ची रेषा ढ वरील प्रक्षेपण प्रतिमा म्हणतात. संक्षिप्त स्वरूपात ही 'प्रक्षेपण (कख)' अशी लिहितात.

आता अशा रेषाखंडाचा विचार करा की, ज्याला सामावणारी रेषा ढ रेषेला लंब राहील. अशा वेळेस त्या रेषाखंडाची ढ रेषेवर प्रक्षेपण प्रतिमा काय होईल? अर्थातच एक बिंदू. म्हणून,

रेषाखंडाची प्रक्षेपण प्रतिमा ही एक तर रेषाखंड असते किंवा बिंदू असते.



आ. ९.१७

आ. ९.१७ (१) मध्ये प्रक्षेपण (कख) = रेख क'ख'

प्रक्षेपण (खग) = रेख ख'ग'

प्रक्षेपण (कग) = रेख क'ग'

म्हणून प्रक्षेपण (कख) + प्रक्षेपण (खग) = प्रक्षेपण (कग) असा निष्कर्ष मिळतो.

त्याचप्रमाणे आ. ९.१७ (२) मध्ये जर कछ ही **'तुटकी रेषा' (Broken line)** असेल तर प्रक्षेपण (कख)+ प्रक्षेपण (खग) + प्रक्षेपण (गघ) + प्रक्षेपण (घच) + प्रक्षेपण (चछ) = प्रक्षेपण (कछ).

☐ ☐ ☐

प्रकरण १०
त्रिकोणांच्या एकरूपतेवरील सोपी उदाहरणे

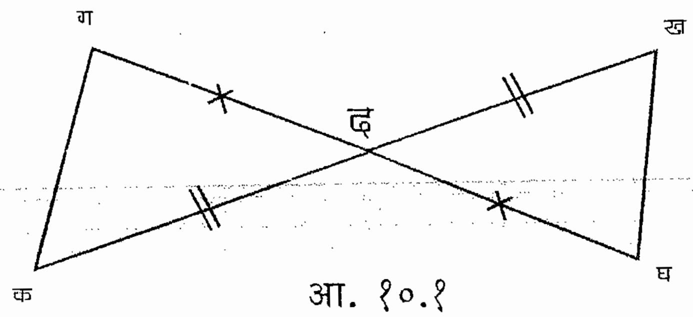
§ १०.१ त्रिकोण एकरूप असणे म्हणजे काय हे आता आपल्याला माहीत झाले आहे. दोन त्रिकोणांमधील ज्या काही मोजक्या गोष्टी माहीत असल्या म्हणजे ते दोन त्रिकोण एकरूप होतातच, त्या गोष्टींचा पडताळा आपण घेतला आहे. त्रिकोण-एकरूपतेच्या ह्या अटी बाकोबा, कोबाको, बाकोको, बाबाबा या नावांनी आपण ओळखतो.

समांतर रेषांमुळे काही विशिष्ट कोन एकरूप होतात; दोन रेषा परस्परांना छेदतात तेव्हा होणारे विरूद्ध कोन एकरूप असतात; समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाजवळील कोन एकरूप असतात; अशी कोनांच्या एकरूपतेबाबतची माहितीही आपल्या संग्रही आहे.

या माहितीचा संकलित स्वरूपात आपल्याला कसा उपयोग करून घेता येतो हे येथे काही उदाहरणांच्या साहाय्याने पाहावयाचे आहे.

§ १०.२

उदाहरण १. आ. १०.१ पाहा. या आकृतीत रेख कख व रेख गघ एकमेकांस द या बिंदूत छेदत आहेत. द हा रेख कख चा मध्यबिंदू आहे व रेख गघ चाही मध्यबिंदू आहे.



आ. १०.१

आता रेख कग व रेख खघ यांच्या लांबी सारख्याच भरतात. पडताळ्यासाठी तुम्ही अशी आकृती काढा व या रेषाखंडांच्या लांबी मोजून पाहा.

वर दिलेल्या वर्णनानुसार (पण ∠ कदग चे माप बदलवून) वेगवेगळ्या आकृती काढून पाहा. दरवेळी l(कग) = l(खघ) होतेच असे आढळून येईल. असे का होते?

याचा शोध घेण्यासाठी आपण △कगद व △खघद यांचा विचार करू.

△कगद च्या भुजांपैकी रेख दग व रेख दक हे △खघद च्या अनुक्रमे रेख दघ व रेख खद यांच्याशी एकरूप आहेत, हे वर सांगितलेलेच आहे. (द हा रेख कख चा मध्यबिंदू आहे, तसेच तो रेख गघ चाही मध्यबिंदू आहे.)

△कगद मधील ∠ गकद हा, △खदघ मधील ∠ खदघ शी एकरूप आहे. (कारण ओळखा.)

रेख दग ≅ रेख दघ
रेख दक ≅ रेख दख
∠ गदक ≅ ∠ खदघ

} ही माहिती, संबंधित त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणण्यास पुरेशी आहे की नाही?

त्रिकोण एकरूपतेची एखादी अट येथे उपयोगी पडते काय? असल्यास कोणती?

△कगद व △खदघ यांची कोणती संगती, एकरूपता होते?

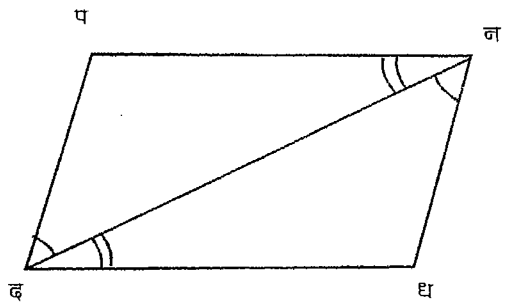
बाकोबा एकरूपता अटीनुसार △कगद ≅ △खघद, हे एव्हाना तुमच्या लक्षात आले असेलच.

आता अशा प्रकारे △कगद ≅ △खघद झाले म्हणजे रेख गक ≅ रेख घख होणे साहजिकच आहे.

या रेषाखंडाच्या लांबी समान असण्याचा आपल्याला जो अनुभव येत होता त्याचे रहस्य हे असे आहे.

उदाहरण २. समांतर भुज चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या लांबी समान असतात. या विधानाचा प्रत्यक्ष मोजमापाने पडताळा घ्या व या अनुभवाचा खुलासा करण्याचा प्रयत्न करा. आ. १०.२ मधील चौकोन हा समांतर भुज चौकोन आहे. म्हणजे व्याख्येप्रमाणे, रेख दध हा रेख पन ला समांतर आहे आणि रेख दप हा रेख धन ला समांतर आहे.

आता, रेख दध व रेख पन या जोडीचा विचार केल्यास ∠ धदन ≅ ∠ पनद होते; (यांना कोणते कोन म्हणतात)? आणि रेख दप व रेख धन या जोडीचा विचार केल्यास ∠ पदन ≅ ∠ धनद होते;(व्युत्क्रमकोन).



आ. १०.२

आ. १०.२ मध्ये दिसणाऱ्या △दधन व △दपन या दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या दृष्टीने या माहितीचा काही उपयोग होईल का ते आपण आता पाहू.

खाली एकीकडे △दधन चे घटक व त्यांच्यासमोर दुसरीकडे △दपन चे एकरूप घटक दाखवले आहेत.

△दधन △दपन

∠ धदन ≅ ∠ पनद

∠ धनद ≅ ∠ पदन

व रेख दन ≅ रेख नद (हा एकच रेषाखंड आहे.)

आणि ही माहिती तर कोबाको पद्धतीची आहे. म्हणून एवढ्या माहितीवरून,△दनध ≅ △नदप हा निष्कर्ष आपल्याला काढता येतो.

तेव्हा या त्रिकोणाचे उरलेले संगत घटक परस्परांशी एकरूप झाले पाहिजेत हे उघड आहे.

रेख नध ≅ रेख दप

व रेख दध ≅ रेख नप

आणि ह्याच तर दिलेल्या समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा आहेत. तेव्हा **समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या लांबी समान असतात** हे दिसून येते.

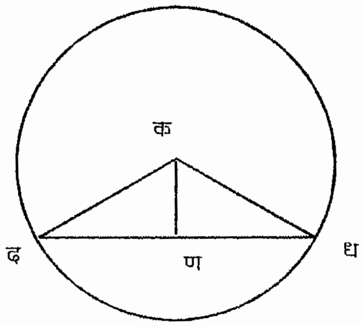
उदाहरण ३. वरील उदाहरण २ मध्ये सांगितल्याप्रमाणे

△दनध ≅ △नदप झाले असता (आ. १०.२.)

∠ ध ≅ ∠ प हे सिद्ध होते.

समांतरभुज चौकोनाचे समोरासमोरील कोन एकरूप असतात, हा जो आपला अनुभव आहे तो यामुळेच.

उदाहरण ४. क हा एका वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे. द व ध हे त्या वर्तुळावरील दोन बिंदू आहेत. ण हा रेख दध चा मध्यबिंदू आहे. (अशा रेख दध ला या वर्तुळाची जीवा म्हणतात.)



आ. १०.३

सममितीबाबतच्या आपल्या अनुभवावरून आपण हे सहज ओळखू शकू की, या आकृतीला रेषा कण वर जर मोड घातली तर द बिंदू ध बिंदूवर पडेल. △कणद हा △कणध शी एकरूप होईल.

प्रत्यक्ष घडी घालून न पाहता हे त्रिकोण एकरूप आहेत याविषयी आपली खात्री पटवून घेण्याचा दुसरा एखादा मार्ग आहे काय?

याचा खुलासा होण्यासाठी △कणद हा △कणध या त्रिकोणांतील एकरूप घटकांची आपण यादी करू.

△कणद △कणध

रेख दण ≅ रेख धण ... (ण हा रेख दध चा मध्यबिंदू असल्याचे दिले आहे.)

रेख कद ≅ रेख कध ... (वर्तुळावरील सर्व बिंदू केंद्रापासून सारख्याच अंतरावर असतात.)

रेख कण ≅ रेख कण ... (सामाईक)

एकरूपतेच्या **बाबाबा** अटीनुसार, हे त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपल्याला आता म्हणता येईल आणि एकरूपतेसाठी संगती राहील कणद ↔ कणध ही.

म्हणजे △कणद ≅ △कणध.

यावरून मग m ∠ कणद = m∠ कणध.

येथे हेही लक्षात घेण्यासारखे आहे की, ∠ कणद व ∠ कणध हे रेषीय जोडी करणारे कोन आहेत. तेव्हा या कोनांच्या मापांची बेरीज १८० असणार हे उघड आहे.

∴m ∠ कणद + m ∠ कणध = १८०

∴m ∠ कणद + m ∠ कणद = १८० (कारण m ∠ कणध = m ∠ कणद)

∴2m ∠ कणद = १८०

∴m ∠ कणद = ९०

म्हणजे रेषा कण ही रेषा दध ला लंब असली पाहिजे.

पुढील निष्कर्षवजा विधान, रिकाम्या जागा योग्य प्रकारे भरून पूर्ण करा.

वर्तुळाच्या जीवेचा ---- आणि त्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड त्या जीवेला ----असतो.

§ १०.३

मागील परिच्छेदात चार उदाहरणे सोडवून दिली आहेत. त्या प्रत्येकात कोणते ना कोणते त्रिकोण एकरूप दाखवण्याचे काम आपल्याला करावे लागले होते. दोन त्रिकोण एकरूप दाखवता आल्याचा परिणाम काय होतो? एका त्रिकोणातील भुजा(किंवा कोन) दुसऱ्या त्रिकोणातील विशिष्ट भुजेशी (किंवा कोनाशी) एकरूप असल्याचा निर्वाळा देता येतो.

दोन त्रिकोण एकरूप कसे दाखवतात? संबंधित दोन त्रिकोणांतील एकरूप घटकांची संगतवार यादी करावी. ही यादी

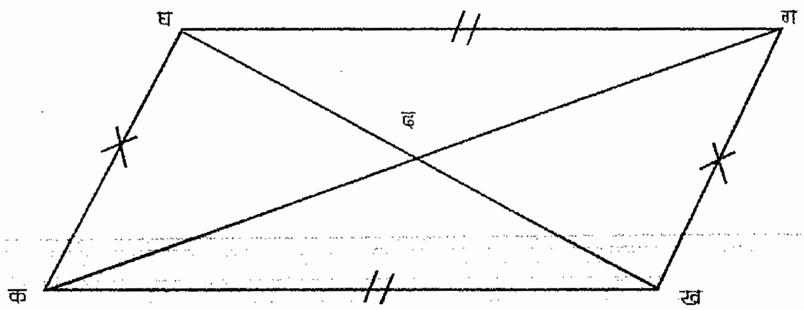
जर बाकोबा, कोबाको, बाबाबा इत्यादीपैकी एखाद्याशी मिळती जुळती असेल तर ते संबंधित त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणता येते.

म्हणजे दोन त्रिकोणांमध्ये काही थोडकी (पण विशिष्ट प्रकारची) माहिती जर दिली असेल तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपल्याला म्हणता येते. त्रिकोण एकरूप झाले म्हणजे त्यांतील उरलेले संगत घटकदेखील (ज्यांच्यासंबंधी सुरुवातीस आपल्याला माहिती नव्हती) एकरूप होतात.

म्हणून उदाहरणांमध्ये, एखादी भुजांची जोडी (अथवा कोनांची जोडी) एकरूप दाखवा असे जर सांगितले असेल तर ही भुजांची जोडी ज्या दोन त्रिकोणांमधील आहे ते त्रिकोण आधी निवडून घ्यावे लागतात. या त्रिकोणांबाबत दिलेली (किंवा मिळवता येण्यासारखी) इतर माहिती जमा करून ते त्रिकोण एकरूप होतात का पाहावे लागते.

उदाहरणांमध्ये, एकरूप त्रिकोणांचे महत्त्व व उपयोग लक्षात यावे म्हणून खाली काही उदाहरणे सोडवून दिली आहेत. प्रत्येक उदाहरणात, एकेक निष्कर्ष काढून दिला आहे. पडताळ्यासाठी तुम्ही नीट आकृती काढा व मोजमापे घ्या.

उदाहरण १. □ कखगघ हा समांतरभुज चौकोन आहे. रेख कग व रेख खघ हे या चौकोनाचे कर्ण परस्परांस द या बिंदूत छेदतात.



आ. १०.४

तर द हा बिंदू दोन्ही कर्णांचा मध्यबिंदू आहे हे दाखवा.

समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील भुजा समान लांबीच्या असतात हे आपल्याला माहीत आहे. आ. १०.४ मधील □ कखगघ च्या रेख कख च्या समोरची भुजा रेख घग आहे. म्हणून रेख कख व रेख घग एकरूप आहेत. याच कारणाने, रेख कघ शी कोणती भुजा एकरूप होते?

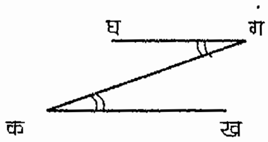
आपल्याला, द हा रेख कग चा मध्यबिंदू असल्याचे दाखवून दयावयाचे आहे; अर्थात रेख कद व रेख दग यांच्या लांबी समान असल्याचे दाखवावे लागेल. रेख दख चा मध्यबिंदू द आहे हे दाखवण्यासाठी कोणते रेषाखंड समान लांबीचे असल्याचे दाखवावे लागेल?

रेख कद, रेख दग, रेख दख व रेख दघ यांचा विचार करण्यासाठी आपल्याला $\triangle$कखद व $\triangle$गघद यांचा विचार करावा लागेल. (याऐवजी दुसरी जोडी कोणती घेतां येईल?)

हे त्रिकोण एकरूप दाखवण्यासाठी कोणती माहिती आपल्याला मिळू शकते ते आता आपण पाहू.

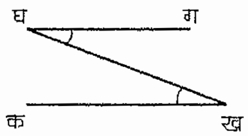
रेख कख, रेख घग शी समांतर आहे.

$\therefore$ $\angle$ घगक $\cong$ $\angle$ खकग (व्युत्क्रमकोन) आ. १०.४ (क) पाहा. समांतर रेषांच्या याच जोडीमुळे, पण छेदिका घख मुळे, व्युत्क्रमकोनांची आणखी एक जोडी एकरूप होते.



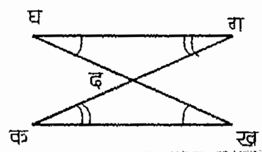
आ. १०.४ (क)

∠ गघख ≅ ∠ कखघ ... (आ. १०.४ (ख) पाहा.) △गघद व △कखद यांच्या भुजा व कोनांबाबत आपल्या संग्रही असलेली माहिती आता पुढीलप्रमाणे आहे.



आ. १०.४ (ख)

∠ दघग ≅ ∠ दखक
रेख घग ≅ रेख कख
व ∠ घगद ∠ दकख.



आ. १०.४ (ग)

कोबाको एकरूपता अटीप्रमाणे
△गघद ≅ △कखद हे म्हणण्यासाठी वरील माहिती पुरेशी आहे.
(आ.१०.४ (क) पाहा.)
आणि △गघद ≅ △कखद झाल्यावर

रेख गद ≅ रेख कद आणि रेख घद ≅ रेख खद होतेच. म्हणजे द हा रेख कग चा मध्यबिंदू ठरतो.

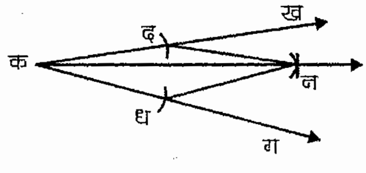
आणि द हा रेख खघ चाही मध्यबिंदू ठरतो.

अशा वेळी, रेख कग व रेख खघ परस्परांस दुभागतात असे म्हणतात.

आतापर्यंतच्या खुलाशाच्या आधारे, समांतरभुज चौकोनाबाबत पुढील विधान आपण करू शकतो.

समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात.

उदाहरण २. आ. १०.५ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, कोणताही ∠खकग काढला. कंपासमध्ये काही एक अंतर घेऊन बिंदू क पासून किरण कख व किरण कग यांस छेदणारा एक कंस काढला. या छेदनबिंदूंस अनुक्रमे द व ध ही नावे दिली. आता कंपासमध्ये काही अंतर घेऊन (त्या समान अंतराने) द व ध पासून कंस काढले. या कंसांचा छेदनबिंदू न हा आहे.



आ. १०.५

अशा वेळी, किरण कन हा ∠ खकग चा दुभाजक असतो हे दाखवा.

△कदन व △कधन यांत,

रेख कद ≅ रेख कध; रेख दन ≅ रेख धन व रेख कन हा दोन्ही त्रिकोणांस सामाईक.

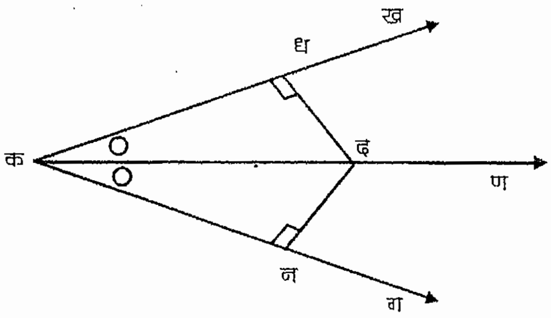
∴ △कदन ≅ △कधन.....(बाबाबा अटीप्रमाणे)

∴ ∠ दकन ≅ ∠ नकध

अर्थात, किरण कन हा ∠ खकग चा दुभाजक असला पाहिजे.

(कागदावर ही आकृती काढल्यावर, कागदास कोठे मोड घालावी म्हणजे किरण कख हा किरण कग वर पडेल?)

उदाहरण ३. 'कोनाच्या दुभाजकावरील कोणताही बिंदू, त्या कोनाच्या भुजांपासून समान अंतरावर असतो,' हे दाखवा.



आ. १०.६

कोणताही ∠ खकग काढा. किरण कण हा या कोनाचा दुभाजक काढा. या दुभाजकावर द हा एक बिंदू घ्या. द पासून रेषा कख वर लंब काढा. द पासून रेषा कग वर लंब काढा. आ. १०.६ मध्ये हे लंब अनुक्रमे रेख दध व रेख दन हे आहेत.

△दकध व △दकन यांत

रेख कद ही सामाईक भुजा आहे.

∠ दकध ≅ ∠ दकन...(कोन दुभागण्यात आला आहे.).

व ∠ दधक ≅ ∠ दनक...(या प्रत्येकाचे माप ९० आहे.)

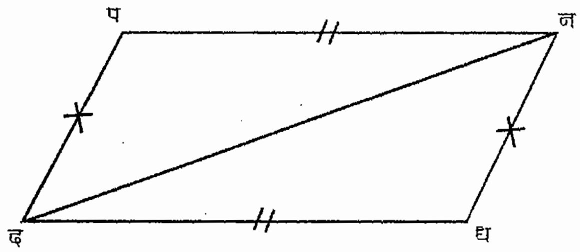
म्हणून बाकोको अटीप्रमाणे, △दकध ≅ △दकन.

यावरून रेख दध ≅ रेख दन

(म्हणजे d(द,ध) = d(द,न).)

अर्थात द हा बिंदू किरण कध पासून व किरण कन पासून सारख्या अंतरावर आहे.

उदाहरण ४. 'चौकोनाच्या संमुख भुजा जर एकरूप असतील तर तो चौकोन समांतरभुज असतो' याची कारणे दया.

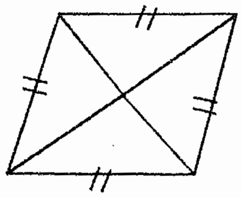


आ. १०.७

□ दधनप मध्ये,

रेख दध ≅ रेख पन व रेख दप ≅ रेख धन असे दिलेले आहे. यावरून, बाबाबा अटीनुसार, △दनप ≅ △नदध (एकरूप भुजांच्या तीन जोड्या कोणत्या आहेत?) या एकरूप त्रिकोणांवरून, ∠दनप ≅ ∠नदध आणि ∠नदप ≅ ∠दनध यांपैकी, ∠दनप ≅ ∠नदध या जोडीवरून, रेख पन व रेख दध समांतर ठरतात. आणि ∠नदप ≅ ∠दनध या जोडीवरून रेख दप व रेख धन समांतर ठरतात. समोरासमोरच्या भुजा अशा प्रकारे समांतर ठरल्यामुळे □ दधनप हा समांतरभुज चौकोन ठरतो.

उदाहरण ५. ज्या चौकोनाच्या चारही भुजा एकरूप असतात त्या चौकोनास समभुज चौकोन असे म्हणतात. अशा प्रकारचा समभुज चौकोन हा समांतरभुज असणारच. (कारण, समोरासमोरच्या भुजा एकरूप आहेत.)

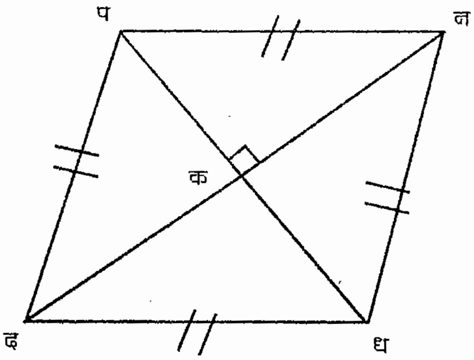


आ. १०.८

यापूर्वी एका उदाहरणात (§ १०.३ मधील उदा. १) आपण पुढील गुणधर्माची माहिती करून घेतली होती.
'समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात.'

म्हणजे **समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात हे अगदी स्पष्टच झाले.**

उदाहरण ६. □ दधनप हा एक समभुज चौकोन आहे. क हा या चौकोनाच्या कर्णांचा छेदबिंदू आहे. (आ.१०.९ पाहा.) m∠दकप = ९० असते हे दाखवा.



आ. १०.९

(वरील उदाहरण ५ वरून) आपल्याला हे माहीत आहे की, क हा बिंदू रेख दन व रेख धप या दोन्ही कर्णांचा मध्यबिंदू आहे. म्हणजे, रेख दक ≅ रेख नक असलेच पाहिजे. व रेख दप ≅ रेख नप हे तर दिलेलेच आहे. ∠पदक ≅ ∠पनक आहे काय?

निश्चितच! कारण △दपन हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. या सर्व माहितीवरून, △दकप ≅ △नकप (बाकोबा)

∴ ∠दकप ≅ ∠नकप.

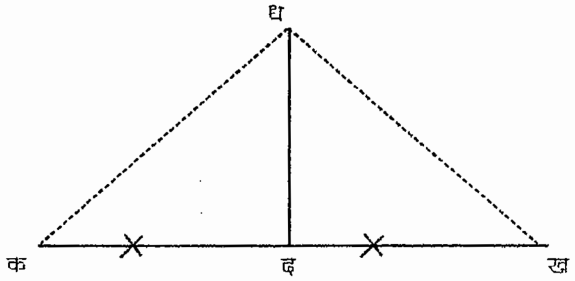
हे दोन कोन तर रेषीय जोडीही करतात. त्यामुळे ∠दकप हा काटकोन असलाच पाहिजे.

म्हणजेच, m∠दकप = ९०.

निष्कर्ष हा की, **समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांशी काटकोन करतात.**

§ **१०.४ प्रश्न :**

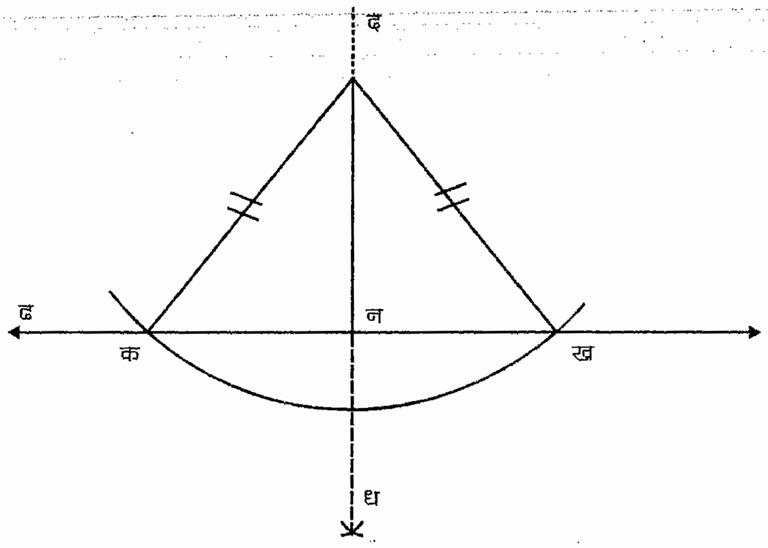
१. आ. १०.१० मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, द हा रेख कख चा मध्यबिंदू आहे. ध हा बिंदू क व ख या बिंदूंपासून सारख्या अंतरावर आहे. (क व ख पासून जो सारख्या अंतरावर आहे असा बिंदू शोधण्यासाठी तुम्ही काय कराल?)



आ. १०.१०

तर ∠कदध व ∠खदध हे एकरूप असले पाहिजेत हे दाखवा. या प्रत्येक कोनाचे माप किती असावे?

२. आ. १०.११ मध्ये, द हा रेषा ढ च्या बाहेरचा एक बिंदू दाखवला आहे. द पासून, कंपासच्या साहाय्याने काही अंतराने एक कंस काढला आहे. हा कंस, रेषा ढ ला क व ख या बिंदूंमध्ये छेदत आहे. ध हा क व ख पासून समदूर आहे. द बिंदू ध शी जोडल्यास रेख दध हा रेषा ढ ला न मध्ये छेदत आहे.

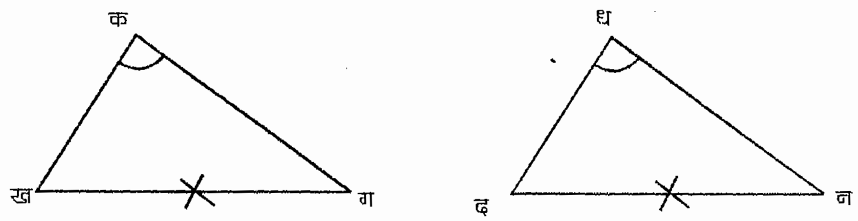


आ. १०.११

∠दनक व ∠दनख या प्रत्येकाचे माप ९० असते हे सोयीस्कर त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या साहयाने दाखवा.

स्वाध्याय

१. △कखग व △दधन यांबाबत पुढील माहिती दिली आहे. ∠ग ≅ ∠ध, ∠क ≅ ∠न आणि रेख खग ≅ रेख दध, तर या त्रिकोणांची कोणती एकास-एक संगती एकरूपता होईल?

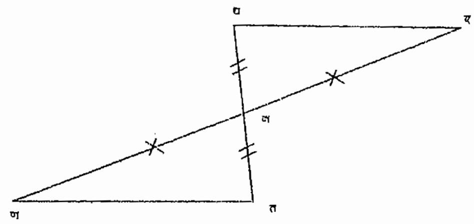


आ. १०.१२

म्हणजे एकरूपतेच्या कोणत्या अटींनुसार हे त्रिकोण एकरूप होतात?

२. आ. १०.१३ मध्ये, रेख णद व रेख धत परस्परांस न या बिंदूत दुभागत आहेत.

∠ नणत हा ∠ नदध शी एकरूप होतो अथवा नाही हे ठरवण्यासाठी कोणत्या त्रिकोणांच्या एकरूपतेचा विचार करावा लागेल?

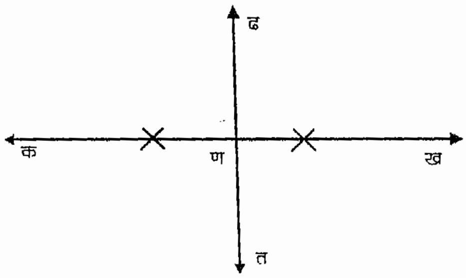


आ. १०.१३

दिलेल्या परिस्थितीत हे त्रिकोण एकरूप होतील का? तुमच्या उत्तराचा खुलासा करा.

३. रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडांच्या टोकांपासून समदूर असतो (म्हणजे सारख्या अंतरावर असतो). या विधानाचा पडताळा अनुमानाने घ्यावयाचा आहे.

यासाठी सोयीस्कर अशी एक आकृती शेजारी दिली आहे. (आ. १०.१४ पाहा.)

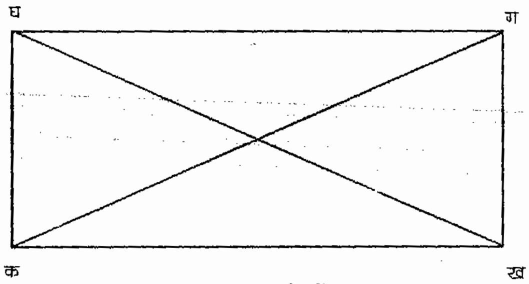


आ. १०.१४

रेख कख च्या ण या मध्यबिंदूतून जाणारी व रेख कख ला लंब असणारी अशी एक रेषा ढ आहे. या रेषेवर त हा एक बिंदू आहे.

l(कत) व l(खत) समान आहेत हे दाखवण्यासाठी कोणते त्रिकोण एकरूप दाखवावे लागतील? हे त्रिकोण एकरूप असण्याची कारणे दया.

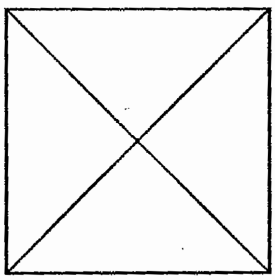
४. आ. १०.१५ मध्ये एक काटकोन चौकोन, □ कखगघ दाखवला आहे. (अर्थात या चौकोनाचा प्रत्येक कोन हा काटकोन आहे व समोरासमोरच्या भुजा एकरूप आहेत.)



आ. १०.१५

△कखग व △कखघ हे परस्परांशी एकरूप होण्याच्या दृष्टीने उपयुक्त होईल अशी, दिलेली माहिती संकलित करा.

'काटकोन चौकोनाचे कर्ण परस्परांशी एकरूप असतात' असा निष्कर्ष वरील त्रिकोणांच्या एकरूपतेवरून काढता येईल काय? खुलासा करा.



आ. १०.१६

५. आ. १०.१६ मध्ये, एक चौरस दाखवला आहे. (चौरस हा असा काटकोन चौकोन असतो की ज्याच्या सर्व भुजा एकरूप आहेत.) चौरसाचे कर्ण एकरूप असतात' हा निष्कर्ष काढून दाखवा.

□□□

उत्तरे

प्रकरण १. स्वाध्याय १. (क) एक (ख) तीन (ग) सहा. २. (क) बिंदू (ख) रेषा (ग) दिलेल्या सर्व बिंदूतून एक रेषा जात असेल. (घ) जर दिलेल्या सर्व बिंदूंना सामावणारे एक प्रतल नसेल. (च) बिंदू ३. (क) असंख्य (ख) प्रतलात (ग) समांतर रेषा (घ) एक (च) एकरेषीय. ५. (क) नाहीत क्ष(ख) एक (ग) नाही; दोन. ६. आठ; किरण कख, कग, कघ, कच, खघ, गच, घख, चग.

प्रकरण २. §२.३ १. (१)ग,ख (२) क,घ; क,ध; ख,घ; ख,ध; ग,घ; ग,ध;(३) द, घ. २. (१) द-न-ध (२) द-ध-न (३) ध-द-न. ३.फ-ण-त. ४.(१) आहेत (२) नाहीत. **§२.९** (१) टोके; टोकां........; लांबी (२) अनंत (३) द हा .... क व ख.... (४) एकरूप (५) टोकांच्या (६) टोकां.... (७) नसते (८) द हा क व ख.... ख हा क व द....**§२.११ १.** (१) खरे (२) खरे (३) खरे (४) खरे.

२. (१) ण (२) किरण घध.... किरण घन (३) किरण कख....किरण कख च्या विरुद्ध.**§२.१३** १. ख,घ,छ २. नाही.

स्वाध्याय १. (१) द, न, ध (२) द, ध, न (३) न, द, ध. २. (१) च (२) क, ग; ध, घ. ३. (१) l(कग).... (खग) (२) १० (३) १० ५(१) क (२) ख (३) असा बिंदू नाही. (४) द (५) किरण खग (६) ग (७) असा बिंदू नाही. ६. (१) $झ_१$ (२) $झ_३$ (३) $झ_१$ (४) होय. (५) होय. (६) नाही. (७) $ढ_२$ (८)$झ_३$,$झ_४$ ७. (१) रेषा घख. (२) रेषा कग.

प्रकरण ३. §३.६ ४(क)घ,प,न (ख) द,फ,च,ध,छ (ग) कोनावर. ५.(क) समाईक....एका रेषेत नसलेल्या (ख) अंतर्भागात....बहिर्भागात (क) छेदसंचास. ६.च. §३.१४. ४. रेषीय जोडी क, ग. ५.(क)∠ घकग (ख) एकरूप (ग) एकरेषीय. (घ) लहान....मोठा **§३.२१** ३. (क)∠ चगघ (ख) १८० (ग) १३३ (घ) ३६ (च) ∠ घखच (छ) ∠ यरल ४. (क) १२५ (ख) १०० (ग) ३५ (घ) १८०-य (च) १८०-य+र. ५.(क) ६० (ख)४३ (ग) १७ (घ) ९०-ध. ६. (क) चूक (ख) बरोबर (ग) बरोबर (घ) बरोबर (च) चूक (छ) बरोबर (ज) चूक. ७. रेषीय जोडी ८. आयत, चौरस, समभुज त्रिकोण.

स्वाध्याय २. (क) १८०-य (ख) १८०-य-र. (ग) क. ३. (क) ३७ (ख) ९०-क+ख (ग) य ४. ४.४५ ५. ३० ६. ४५ ७. ९०-ध.

प्रकरण ४. §४.२ १. रेख कख, रेख खग, रेख गक. २.△णतफ ४. दध....नद, दध, धन. **§४.५** ७. नाही ८. (१) होय (२) नाही.

स्वाध्याय २. (१) रेख कद, रेख दख, रेख कख. (२)∠ नदध, ∠ दनध, ∠ दधन (३) रेख कन (४) △कनद व △कनख (५) △नदध व △कदख (६) रेख नध (७) ख. (८) △कखद (९) △नकध. ३. दोन; रेख दन ४. (क) ∠ क व ∠ ख (ख) ∠ ड व ∠ फ (ग) रेख नप व रेख नध (घ) १०० ५. रेख दध ६.∠ ण ७. रेख णघ ८. २०.९. (१) द-क-ग (२) ख-फ-ग (३) द-फ-न १०. (१) ∠ कदघ (२) ∠ खदक (३) △दगघ (४)∠ खदग व ∠ दगख.

प्रकरण ५. §५.३ १. ण; ख; त. २. घचछ↔यरल. ७. होय. कखघ↔कगघ. १०(क) एकरूप....संगतकोनांची....एकरूप (ख)△घचछ (ग) △ढणत **§५.१०** २. (क) बरोबर (ख) चूक (ग) बरोबर (घ) बरोबर (च) चूक (छ) बरोबर (ज) बरोबर (झ) बरोबर. ७. आहे; बाकोबा. स्वाध्याय २. कखग↔धनद.

प्रकरण ६. §६.३ १. (१) असत्य (२) सत्य (३) असत्य (४) असत्य (५) असत्य (६) सत्य (७) असत्य (८) असत्य (९) सत्य (१०) सत्य. ४. (१) नाही. ५.(१) क (२) ग (३) ख (४) घ (५) ग ६. (क) समांतर (ख) वितलीय (ग) त्यांना सामावणाऱ्या रेषा समांतर (घ) समांतर.

§६.५ १. (१) सत्य (२) सत्य (३) असत्य (४) असत्य (५) सत्य.

२. (१) संगत (२) आंतरव्युत्क्रम (३) रेषेच्या एकाच बाजूचे आंतरकोन (४)∠खकछ (५) विरुद्ध (६) ∠कखग (७)∠कखग. ३. (१) घ. (२) ज. (३) क. (४) छ. (५) च व ग.

§६.७ १. सत्य विधाने (१), (२), (४), (५), (६), (७), (८), (९), (१०), (११)

३. (१) १३० (२) ५० (३) ५०. ५. ग=१२०; ख=घ=६०; ट=ड=१२०; ठ=ढ=६०; झ=द=त=१००. ६. (१) नाही. (२) ७०.(३) ८०. (४) होय.

स्वाध्याय १. (१), (२). ३. (२), (३), (५) सत्य. ४. ८० व १००. ५. (१) रेख कघ, रेख खग. (२) रेख कख, रेख घग. (३) ∠कघख. ८. (१) संगतकोन (२) संगतकोन (३) ण व त (४) ढ व त
प्रकरण ८. §८.२ ३.(१) समद्विभुज (२) असा त्रिकोण नसतो (३) विषमभुज (४) वर्तुळ (५) चौरस (६) समभुज चौकोन
§८.५ १ (१) द (२) ख.६.१(न);
२. (ख); ३. (रेषा पध); ४. (रेषा दन); ५. (द); ६. (प); ७. (न). ७. १. खघ, २. गक, ३. प (ख), घ (ध), क (क) ४. पध **§८.८** २. (१) रेषाखंड (२) रेषाखंड.
स्वाध्याय १. (२) द (३) ध (४) नाही (५) नाही. २. (१) ६०, (२) समलंब (३) ढ (४) ढ (५) ९०. ४. (१) असत्य (२) असत्य (३) असत्य (४) असत्य (५) सत्य. ५. (१) ख (२) रेषा कख (३) रेख कग (४) रेषा कग.

□ □ □